GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL   GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

CÁLCULO DE PROBABILIDADES: EVENTOS INDEPENDENTES E CONSECUTIVOS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT312 Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	• Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e expressá-la na forma de fração, decimal e percentual. • Compreender a noção de independência de eventos e calcular probabilidades usando esse conceito. • Resolver situações problema envolvendo probabilidade de eventos independentes e consecutivos.	**D065_M** Resolver problema envolvendo noções de probabilidade.

Contextualização

Na semana anterior estudamos a probabilidade condicional, isto é, como a ocorrência de um evento interfere na ocorrência de um segundo evento.

Recorde-se do problema da viagem para Natal: sabendo que o passageiro estava voando pela primeira vez, a probabilidade dele conhecer Natal era de aproximadamente 22%, enquanto que, se o passageiro já tivesse voado a probabilidade dele conhecer Natal subia para cerca de 35%. Daí tiramos que, para esse grupo, ter viajado de avião e conhecer Natal são dois evento que estão relacionados.

Agora pense nas duas situações abaixo:

1. Um dado e uma moeda são lançados simultaneamente, qual a probabilidade de que saia o número 5 e uma cara?
2. Um casal planeja ter 2 filhos, qual a probabilidade de que esse casal tenha duas meninas?

Nestes dois casos, você deve imaginar que um evento não interfere no segundo, isso porque o lançamento da moeda e do dado são feitos de forma independente e o sexo de um filho não interfere no sexo do segundo filho de um casal. Esses tipos de eventos são chamados de *eventos independentes*.

A questão que devemos levantar aqui é: como identificar dois eventos independentes? Este é o tema central deste material.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

EVENTOS INDEPENDENTES

Eventos Independentes

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável U, finito e não vazio. Os eventos A e B são independentes se **P(B|A)=P(B)**.

Considere um duplo lançamento de uma moeda honesta. Sejam os eventos: A “obter coroa no primeiro lançamento” e B “obter coroa no segundo lançamento”. Vamos verificar os dois eventos: designando Cara por K e Coroa por C, temos o seguinte espaço amostral

U={KK, KC, CK, CC},

daí os eventos A e B são dados por

A={CK, CC} e **B={KC, CC}**

Vamos determinar P(B|A), para isso, devemos assumir que o evento A ocorreu, assim, sabemos que temos um coroa no primeiro lançamento (2 possibilidade), dentre essas duas possibilidades apenas 1 delas possuem coroa no segundo lançamento, ou seja, o evento B ocorre. Portanto,

$$P(B|A) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

Agora, note que a probabilidade de ocorrer apenas o evento B também é 50%:

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\% = P(B|A).$$

Logo, os eventos A e B são eventos independentes.

Podemos apresentar uma segunda forma de determinar se dois eventos são ou não independentes:

Eventos Independentes

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável U, finito e não vazio. Os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Vejamos outros exemplos:

1 Considere uma caixa contendo quatro bolas pretas e seis bolas azuis, todas de mesmo tamanho e textura. Escolhendo duas bolas com reposição, qual é a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda, azul?

Vamos assumir os eventos A “a primeira bola retirada é preta” e B “a segunda bola retirada é azul”. Para o problema temos:

U={P, P, P, P, A, A, A, A, A, A}; A={P, P, P, P} e B={A, A, A, A, A, A}

As probabilidades do eventos A e B são

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%;$$
$$P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%.$$

Como as bolas são idênticas, as duas tiragens são independentes, portanto, a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda, azul, é

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = 0,24 = 24\%.$$

2 Caio possui dois despertadores, um deles funciona em 85% das vezes em que é colocado para despertar e o outro funciona em 60% das vezes. Caio tem uma consulta cedo e está preocupado com a hora, portanto ele deve colocar os dois despertadores para despertar. Qual a probabilidade de que os dois relógios despertem na hora certa? Qual a probabilidade de que um ou outro relógio desperte na hora correta?

Primeiramente, chamaremos de eventos A e B o primeiro e o segundo relógios despertarem, respectivamente, assim, P(A)=85%=0,85 e P(B)=60%=0,6. Como os dois eventos são independentes (um despertador não interfere no outro), a probabilidade de que os dois relógios despertem na hora certa é

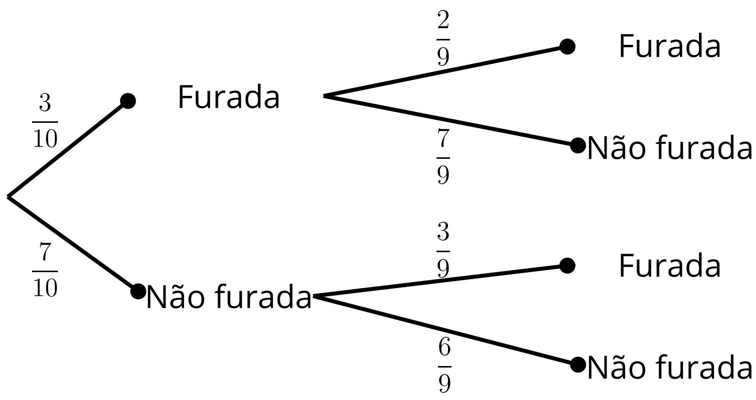
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,85 \cdot 0,60 = 0,51 = 51\%.$$

Já a probabilidade de que um ou outro relógio desperte na hora correta é dado pela probabilidade da união dos dois eventos, como vimos nas semanas anteriores,

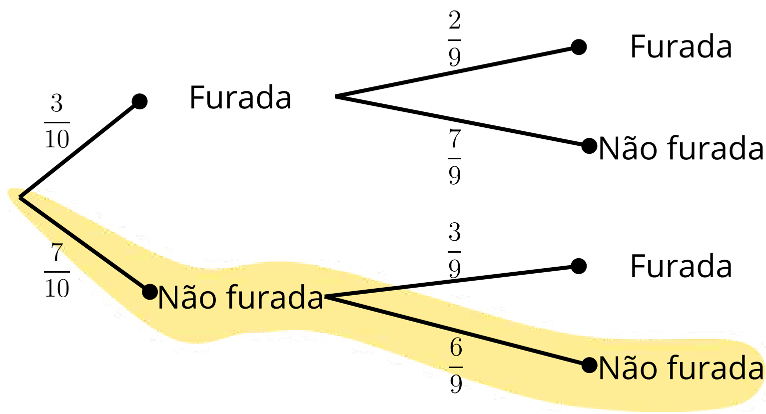
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,85 + 0,60 - 0,51 = 0,94 = 94\%.$$

Uma forma de representar as probabilidades quando temos dois ou mais eventos que ocorrem em sequência (**eventos consecutivos**) é por um diagrama de árvores, vejamos a situação a seguir: *Em um cesto de roupas há dez camisetas, das quais três estão furadas. Duas camisetas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição no cesto. Qual é a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas?*

Podemos construir um diagrama de árvore para representar os resultados possíveis desse experimento. Associando probabilidades a cada “galho”, note que o segundo galho depende do resultado do primeiro galho, já que não há reposição da camisa selecionada na primeira escolha:



Desejamos encontrar a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas, isso ocorre no galho destacado abaixo:



Assim, temos que

$$P('duas\ camisetas\ não\ furadas') = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \approx 0,467 = 46,7\%.$$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. A probabilidade de um jogador X acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade de um jogador Y acertar o mesmo alvo é de 90%. Se os dois jogarem seus dardos uma única vez, simultaneamente, qual é a probabilidade de que:
a) ambos atinjam o alvo?
b) pelo menos um atinja o alvo?

SOLUÇÃO. Considere os eventos X: "jogador X acerta o alvo" e Y: "jogador Y acerta O alvo".

a) Como os dois jogadores são independentes, os eventos X e Y são independentes, assim,

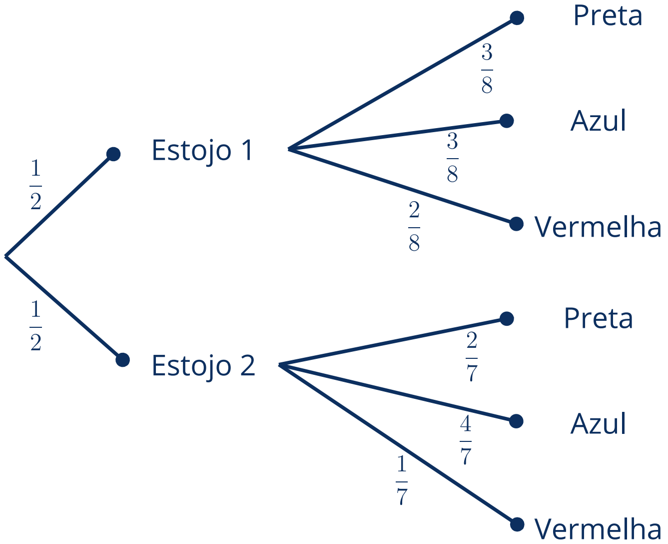
$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72 = 72\%.$$

b) A probabilidade de que pelo menos um atinja o alvo é dado pela união dos eventos X e Y:

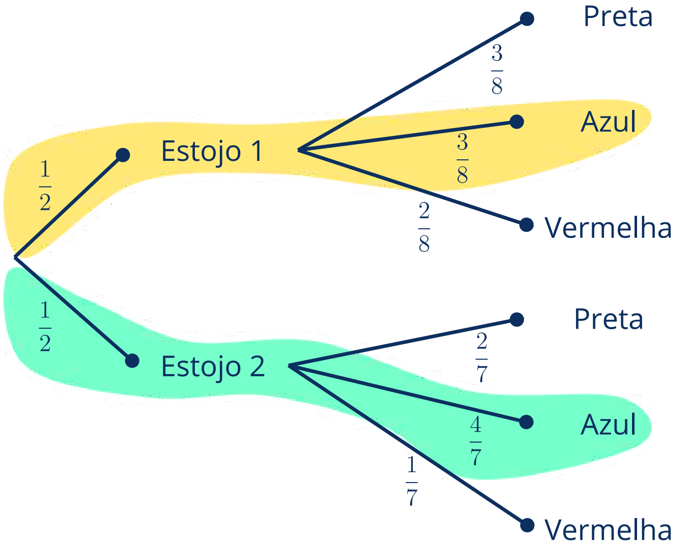
$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98 = 98\%.$$

EXERCÍCIO 2. Dois estojos idênticos estão sobre uma mesa. Um deles tem 3 canetas pretas, 2 vermelhas e 3 azuis; o outro tem 2 canetas pretas, 4 azuis e 1 vermelha. Fabrício escolhe ao acaso um estojo e dele extrai, aleatoriamente, uma caneta. Qual é a probabilidade de Fabrício tirar uma caneta azul?

SOLUÇÃO. Para facilitar a compreensão do problema, podemos representar o problema na forma de um diagrama de árvores, com as devidas probabilidades:



Considere o evento A: “tirar uma caneta azul”, Fabrício pode fazer isso de duas formas: tirar uma caneta azul do estojo 1 ou tirar uma caneta azul do estojo 2, conforme marcado abaixo

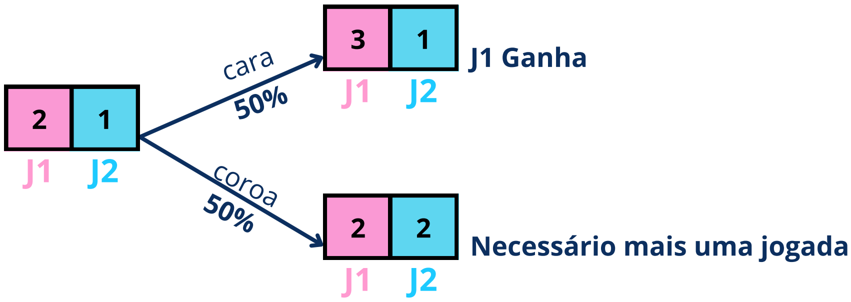


Portanto,

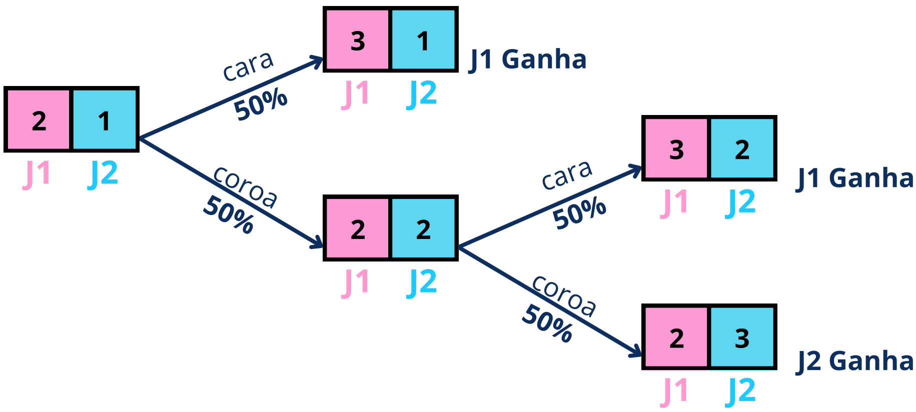
$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{3}{16}+\frac{4}{14} = \frac{3\cdot 7}{16\cdot 7}+\frac{4\cdot 8}{14\cdot 8} = \frac{21}{112}+\frac{32}{112} = \frac{53}{112} \approx 0,473 = 47,3\%.$$

EXERCÍCIO 3. **(PROBLEMA APRESENTADO NA QUINZENA 6)** Suponha que dois jogadores tenham apostado uma quantia de dinheiro num jogo de azar (estilo cara ou coroa) a ser dado como encerrado quando um dos jogadores vencer 3 vezes, mas que a partida tenha sido interrompida quando o primeiro jogador estiver vencendo por duas rodadas a uma. Como os jogadores terão que dividir a aposta?

SOLUÇÃO. Para facilitar a compreensão do problema vamos supor que o jogo era um cara ou coroa, o jogador 1 vence caso o resultado seja cara enquanto o jogador 2 ganha se o resultado for coroa.
O jogo foi interrompido quando o placar estava de 2x1 para o jogador 1, vejamos as possibilidades, caso fosse feito mais um lançamento da moeda:



Pode ser necessário mais uma rodada para a definição do jogo, vejamos as possibilidades para o próximo lançamento:



Com mais duas rodadas o ganhador estaria definido, vejamos a probabilidade de cada um dos dois jogadores ganhar:

$$P('J1\,Ganha') = 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,5 + 0,25 = 0,75 = 75\%.$$
$$P('J2\,Ganha') = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%.$$

Desta forma, a forma mais justa de dividir o dinheiro apostado entre os dois jogadores é: 75% do dinheiro ficará com o jogador 1 e 25% do dinheiro ficará com o jogador 2.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 6 – Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - Probabilidade: p. 137-141.
2. **Volume 5 – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - Probabilidade: p. 84-88.

SITE

Portal da Matemática - OBMEP

https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=47

A seção “Probabilidade condicional” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado.

LEITURA

No Volume 5 da Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática), páginas 91 a 93, é possível obter um texto, junto com atividades sobre os paradoxos e a probabilidade, destacando o problema dos aniversários e o paradoxo de Monty Hall.

Na coleção Prisma, volume sobre Estatística, Combinatória e Probabilidade, páginas 128 e 129, há um texto relacionando probabilidade e métodos contraceptivos.

Atividades

ATIVIDADE 1

Uma pessoa escolhe uma fruta aleatoriamente de uma cesta que contém 5 maçãs, 3 bananas e 2 laranjas. Após devolver a fruta escolhida, ela faz uma nova escolha. A probabilidade de essa pessoa ter escolhido uma maçã na primeira escolha e uma banana na segunda escolha é de:

A) 0,02
B) 0,15
C) 0,30
D) 0,50
E) 1,00

ATIVIDADE 2

Joaquim é um influenciador digital e, em todos os seus vídeos, afirma ser "o cara mais sortudo do mundo", ao ponto de garantir que nunca perdeu em uma brincadeira de par ou ímpar. Certo dia, em um de seus vídeos, ele fez a seguinte aposta:

"Irei lançar esta moeda 10 vezes e, em todas as vezes, sairá cara."

A probabilidade de a afirmação de Joaquim dar certo é de:

A) 0,1%
B) 0,5%
C) 10%
D) 50%
E) 99%

ATIVIDADE 3

Analise as afirmações, indicando se cada uma é verdadeira (V) ou falsa (F):

( ) Pegar uma carta de um baralho e, em seguida, pegar outra carta do mesmo baralho sem reposição são eventos independentes.
( ) A probabilidade de tirar uma carta de copas em um baralho e a probabilidade de jogar um dado e obter um número par são eventos independentes.
( ) Tirar uma bola vermelha de uma caixa e depois tirar uma bola azul da mesma caixa, sem reposição, são eventos independentes.
( ) Tirar uma carta de um baralho e, em seguida, tirar outra carta do mesmo baralho, com reposição, são eventos independentes.
( ) Lançar duas moedas ao mesmo tempo é um exemplo de eventos independentes.

A sequência correta que representa as afirmações acima é:

A) V, F, F, V, V.
B) V, V, F, V, V.
C) V, V, V, F, V.
D) F, V, F, V, V.
E) F, V, F, F, V

ATIVIDADE 4

Numa siderúrgica, três máquinas independentes apresentam um plano de manutenção preventiva de acordo com o quadro de probabilidades de defeito de cada uma.

Máquina	Probabilidade de defeito
X	$\frac{1}{2}$
Y	$\frac{1}{3}$
Z	$\frac{1}{4}$

Qual é a probabilidade das três maquinas apresentarem defeitos?

A) $\frac{1}{24}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{3}{24}$

D) $\frac{2}{12}$

E) $\frac{3}{9}$

ATIVIDADE 5

Nos jogos de RPG (*Role-Playing Game*), os jogadores colaboram para criar narrativas ricas e dinâmicas em um universo imaginário. Cada jogador interpreta um personagem com características únicas, habilidades e histórias pessoais. A interação entre os personagens e as decisões tomadas durante o jogo moldam o desenrolar da trama.

Os dados desempenham um papel importante na mecânica dos RPGs, servindo como ferramentas que influenciam as ações dos personagens e o resultado de eventos. Os dados de RPG são diferentes dos dados tradicionais de jogos de tabuleiro. Um exemplo de dado de RPG é o D20 (20 faces), que se tornou um símbolo do gênero e pode ser usado para diversas ações nas partidas.

Fonte: https://www.ludeka.com.br/DD20LAZT

Um jogador de RPG está participando de uma campanha que envolve o lançamento de um dado de 12 lados. O dado possui os números de 1 a 12. O jogador fará dois lançamentos consecutivos do dado. Qual é a probabilidade de o jogador obter um número par no primeiro lançamento e um número maior que 8 no segundo lançamento?

A) 43,3%
B) 31,5%
C) 28,9%
D) 22,3%
E) 16,7%

ATIVIDADE 6

Para que dois eventos de um espaço amostral equiprovável U (finito e não vazio) sejam independentes, é necessário que **P(A∩B) = P(A) · P(B)**. Demonstre, por meio dessa relação, que ao retirar, ao acaso, uma carta de um baralho, o **evento A** (sair uma carta de copas) e o **evento B** (sair um rei) são independentes.

ATIVIDADE 7

Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso. Prove que esse evento não é independente.

ATIVIDADE 8

Priscilla está jogando um dado comum de seis faces. Ela deseja saber a probabilidade de obter um número par em três lançamentos consecutivos do dado. Qual é a probabilidade de Priscilla obter um número par no primeiro lançamento, novamente um número par no segundo e, posteriormente, outro número par no terceiro lançamento?

ATIVIDADE 9

Uma fábrica produz lâmpadas LED. Cada lâmpada tem uma probabilidade de 90% de funcionar corretamente. A fábrica realiza um teste em três lâmpadas escolhidas aleatoriamente em um determinado lote para verificar se todas estão funcionando corretamente.

A) Qual é a probabilidade de que todas as três lâmpadas testadas funcionem corretamente?

B) Qual é a probabilidade de que todas as três lâmpadas testadas não funcionem corretamente?

C) Qual é a probabilidade de que duas primeiras lâmpadas testadas funcionem corretamente e a terceira não?

ATIVIDADE 10

O jogo do bafo é uma brincadeira recreativa popular entre colecionadores de figurinhas (ou cartinhas), onde o objetivo é ganhar as figurinhas que ficam viradas para baixo. O nome do jogo vem do deslocamento de ar (bafo) causado ao bater com a mão no monte de figurinhas.

Ana Luiza, Bernardo e Lorenzo estão jogando bafo com suas cartinhas de monstros de bolso, e a regra estabelecida por eles é: “Cada jogador pode bater em uma cartinha 3 vezes. Para ganhar a cartinha, ela precisa virar (desenho para cima) pelo menos duas vezes.”

Qual é a probabilidade de ganhar uma cartinha virando-a **exatamente** duas vezes?

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Combinatória e Probabilidade. 8. ed., São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

SOUZA, J. **Matemática**: Multiversos. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE; Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** Análise combinatória, probabilidade e computação. 1 ed. São Paulo: Ática, 2020.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 5:** combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.