

Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA FINITA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRIPTOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	- Identificar a regularidade que permite a dedução da fórmula para cálculo da Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética finita. - Resolver problemas envolvendo Progressões Aritméticas.	D096_M Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.

Contextualização

13/03/2024 15h35

Municípios do Espírito Santo firmam compromisso para implementar Busca Ativa Escolar

sedu.es.gov

Os direitos das crianças e adolescentes representam um dos pilares mais importantes para a construção de uma sociedade justa e igualitária. No Brasil, o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), instituído pela Lei 8.069 de 1990, consolidou avanços significativos para a promoção e proteção dos direitos humanos desse público.



sedu.es.gov

Evento realizado em Vitória, os 78 municípios capixabas se comprometeram a encontrar e rematricular crianças e adolescentes que estão fora da escola.

Um dos direitos das crianças e adolescentes é a garantia à educação que é essencial para promover o seu desenvolvimento pleno. No Espírito Santo, a Busca Ativa Escolar tem sido uma ferramenta importante para localizar e rematricular jovens fora da escola, enfrentando a evasão e exclusão escolar. Durante um evento no ano de 2024 em Vitória, os 78 municípios capixabas reforçaram seus compromissos com essa estratégia, mostrando como a união de esforços pode transformar a realidade de muitos meninos e meninas.

A Matemática, além de seu papel teórico, possui aplicações práticas que podem ser úteis no planejamento de ações como essas. Neste material, exploraremos o tema da **soma dos termos de uma progressão aritmética (PA)** e sua conexão com desafios do cotidiano.

Considere, por exemplo, uma iniciativa de organização de visitas escolares para conscientizar famílias sobre a importância de manter as crianças na escola. Se a equipe de agentes de integração aumentar progressivamente a quantidade de famílias visitadas a cada semana, seguindo um padrão constante, podemos calcular o total de visitas realizadas ao longo de um período utilizando a **soma dos termos de uma PA**. Esse cálculo ajuda a mensurar o impacto da ação e a prever os recursos necessários para seu sucesso.

Prepare-se para explorar a resolução de problemas reais, unindo conhecimento matemático e responsabilidade cidadã!

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é amplamente reconhecido como um dos maiores matemáticos do século XVIII. Há uma história famosa sobre sua infância que exemplifica sua genialidade.

Certo dia, seu professor pediu à turma que calculasse a soma dos **100 primeiros números naturais**:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$



Carl Friedrich Gauss, era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico.

Enquanto os colegas demoravam, Gauss encontrou rapidamente a resposta correta: 5050.

O jovem Gauss percebeu um padrão:

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100

101

101

101

Como há 50 pares de números, ele concluiu que a soma total seria: **$50 \times 101 = 5050$** .

Esse raciocínio levou à fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (S_n) quando o primeiro (a_1) e o último (a_n) termos são conhecidos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Em que:

- (S_n) : é a soma dos n termos;
- (a_1) : é o primeiro termo;
- (a_n) : é o n ésimo termo;
- n é o número de termos.



DICA DE ESTUDO

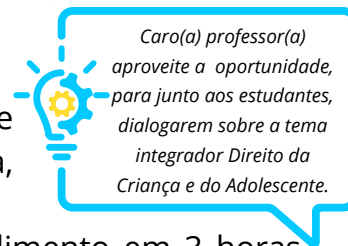
DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DA SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA.



Vamos ver o exemplo:

- Um projeto oferece apoio psicossocial para crianças e adolescentes em situação de risco. Na primeira semana, são realizadas 5 horas de atendimento.

A cada semana, a equipe aumenta o tempo de atendimento em 3 horas para atender mais jovens. Qual será o total de horas de atendimento realizado após 12 semanas?



Vamos analisar os dados do problema, podemos ver que as horas de atendimento por semana formam uma PA com:

- $a_1 = 5$ (horas de atendimento na 1ª semana);
- $r = 3$ (aumento semanal de horas);
- $n = 12$ (duração total do projeto em semanas).

Primeiro precisamos calcular o último termo a_n da PA. Usamos a fórmula do termo geral que estudamos no material anterior: $a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$

Substituímos os valores:

$$a_{12} = 3 \cdot 12 + (5 - 3)$$

$$a_{12} = 36 + 2$$

$$a_{12} = 38$$

O número de horas de atendimento na 12ª semana foi 38.

Para calcular a soma total das horas de atendimento (S_n)

Usamos a fórmula da soma dos n primeiros termos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Substituímos os valores:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (5 + 38)}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot 43}{2}$$

$$S_{12} = \frac{516}{2}$$

$$S_{12} = 258$$

O total de horas de atendimento realizado após 12 semanas será 258 horas.



Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Uma equipe de agentes de integração escolar iniciou um projeto de conscientização, visitando famílias para reforçar a importância da permanência das crianças na escola. Na primeira semana, foram visitadas 10 famílias, e a cada semana seguinte, a equipe conseguiu visitar 5 famílias a mais do que na semana anterior. Se o projeto durou 8 semanas, quantas famílias foram visitadas no total durante esse período?

SOLUÇÃO

Sabemos que:

- $a_1 = 10$ (número de famílias visitadas na 1ª semana),
- A quantidade de famílias visitadas aumenta 5 por semana ($r = 5$),
- O projeto durou ($n = 8$) 8 semanas.

Para calcular o total de famílias visitadas (S_n), precisamos da soma dos termos da PA. Antes disso, determinamos o último termo (a_n):

$$a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Substituímos os valores:

$$a_8 = 5 \cdot 8 + (10 - 5)$$

$$a_8 = 40 + 5$$

$$a_8 = 45$$

Agora, aplicamos a fórmula da soma dos termos do PA: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Substituímos os valores:

$$S_8 = \frac{8 \cdot (10 + 45)}{2}$$

$$S_8 = \frac{8 \cdot 55}{2}$$

$$S_8 = \frac{440}{2}$$

$$S_8 = 220$$

Resposta:

No total, a equipe visitou 220 famílias ao longo das 8 semanas.

EXERCÍCIO 2

(Enem) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é :

- A) 21.
- B) 24.
- C) 26.
- D) 28.
- E) 31.



SOLUÇÃO

Para resolver essa questão, vamos identificar a progressão aritmética que nos é dada no problema.

Podemos considerar que cada coluna corresponde a um termo da sequência numérica, portanto, o primeiro termo é 1 ($a_1 = 1$), o segundo é 2 ($a_2 = 2$), o terceiro termo é 3 ($a_3 = 3$) e assim sucessivamente até o sétimo e último termo da sequência numérica ($a_7 = 7$).

Sabemos que a progressão possui sete elementos ($n = 7$) e temos conhecidos o primeiro e o último termo, logo, podemos usar a fórmula da soma dos elementos de uma PA:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ S_7 &= \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} \\ S_7 &= \frac{(1 + 7) \cdot 7}{2} \\ S_7 &= \frac{8 \cdot 7}{2} \\ S_7 &= \frac{56}{2} = 28 \end{aligned}$$

Então há 28 cartas distribuídas nas fileiras. Como no baralho há 52 cartas, fazendo $52 - 28 = 24$, descobrimos que há **24 cartas no monte**.

A alternativa correta é a letra B.

Material Extra



LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS - FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTIMICA E SEQUÊNCIAS

- Na página 129 a atividade sugerida “Explore para descobrir” é uma boa oportunidade para que os alunos em duplas possam iniciar o entendimento do conceito da soma dos termos de um PA.
- Nas páginas 131 a 132 as atividades ali apresentadas podem ser usadas como aprofundamento dos estudos da soma dos termos de uma PA finita



LIVRO PRISMAS - FUNÇÕES E PROGRESSÕES

- Nas página 128 a 131 as atividades apresentadas podem ser usadas como aprofundamento dos estudos das progressões aritméticas, incluindo a soma dos termos de uma PA finita.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.



Explicação da fórmula para a soma de uma PA finita



Atividades

ATIVIDADE 1

João está treinando para uma maratona e decide correr todos os dias. No primeiro dia, ele corre 2 km, no segundo, ele corre 3 km, no terceiro, 4 km, e assim por diante, a cada dia seguinte, ele aumenta a distância percorrida em 1 km. João pretende treinar durante 10 dias consecutivos.

Qual será a **distância total percorrida** por João ao final dos **10 dias** de treino?

- A) 25 km
- B) 30 km
- C) 35 km
- D) 55 km
- E) 65 km



ATIVIDADE 2

Maria decidiu economizar dinheiro para comprar um novo laptop. No primeiro mês, ela economiza R\$ 50,00, no segundo mês, R\$ 70,00, no terceiro, R\$ 90,00 e assim por diante. A cada mês seguinte, ela decide aumentar o valor economizado em R\$ 20,00. Maria pretende economizar durante **12 meses**.

Qual será o **valor total** economizado por Maria ao final desse período?

- A) R\$ 250,00
- B) R\$ 270,00
- C) R\$ 960,00
- D) R\$ 19200,00
- E) R\$ 2320,00



GOOGLE

ATIVIDADE 3

A SOMA DE GAUSS

$$S_N = \frac{(a_1 + a_N)N}{2}$$

Nem sempre é conveniente **somar termo a termo** de uma progressão aritmética (PA). Para facilitar nosso trabalho podemos usar a fórmula da **soma de Gauss**. Usando essa fórmula, podemos calcular a soma **S** de todos os **números pares positivos menores que 100**. Quanto vale S?

- A) 2352
- B) 2450
- C) 2550
- D) 2552
- E) 2600

ATIVIDADE 4

Usando a **fórmula da soma de Gauss** podemos deduzir uma expressão geral para a **soma S dos N primeiros números ímpares positivos**. Por exemplo, se $N = 2$ então $S = 1 + 3 = 4$, se $N = 3$ então $S = 1 + 3 + 5 = 9$. Uma **expressão geral** para **S** é?

- A) $S = 2N - 1$
- B) $S = N^2 - 1$
- C) $S = N^2$
- D) $S = N^2 + N$
- E) $S = N^3$

ATIVIDADE 5

Ana está participando de uma competição de leitura na escola. No primeiro dia, ela lê 5 páginas de um livro e, a cada dia seguinte, ela 2 páginas a mais. Ana pretende continuar essa rotina de leitura durante **15 dias**.

Qual será o **número total de páginas** lidas por Ana ao final dos 15 dias?

- A) 285 páginas
- B) 255 páginas
- C) 225 páginas
- D) 220 páginas
- E) 215 páginas



CANVA

ATIVIDADE 6



CANVA

Ao financiar uma casa em **20 anos**, José fechou o seguinte negócio com a financeira: em **cada ano**, o valor das 12 prestações **deve ser igual** e o valor da prestação mensal em um determinado ano é **R\$ 40,00 a mais** que o valor pago, mensalmente, no ano anterior.

Considerando que o valor da prestação no **primeiro ano é de R\$ 350,00**, qual será o **valor total pago** por José, em reais?

- A) 175000
- B) 175100
- C) 175200
- D) 175300
- E) 175400

ATIVIDADE 7

Numa **sequência de 50 números** que **aumenta de 5 em 5** (PA de razão 5), a **soma** de todos esses números é igual a 6625. Qual é o **1º número** que aparece nessa sequência?

- A) 5
- B) 10
- C) 15
- D) 20
- E) 25

ATIVIDADE 8

Se a **soma S** dos **n primeiros termos** de uma PA é dada pela expressão

$$S = 2n^2 - n \quad \text{então qual é o valor do } \mathbf{20^\circ \text{ termo?}}$$

- A) 77
- B) 81
- C) 85
- D) 89
- E) 93

ATIVIDADE 9

A **soma dos 10 termos** de uma PA é 300. Se o **primeiro** termo dessa PA é 3, assinale a alternativa que apresenta sua **razão**.

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) 8

ATIVIDADE 10



Numa caixa há 1000 bolinhas de gude. Retira-se 15 bolinhas na primeira vez, 20 na segunda, 25 na terceira e assim sucessivamente na mesma razão.

Após a **décima quinta** retirada, quantas bolinhas **sobrarão** na caixa?

- A) 100
- B) 150
- C) 200
- D) 250
- E) 300

Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

