CONEXÕES MATEMÁTICAS

QUINZENA **07** 28/04 a 02/05

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL   GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

CÁLCULO DE PROBABILIDADES: UNIÃO DE DOIS EVENTOS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT311 Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. **EM13MAT511** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	• Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento em um experimento aleatório e expressá-la na forma de fração, decimal e percentual. • Calcular a probabilidade da união de dois eventos. • Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não. • Reconhecer a existência de eventos equiprováveis ou não.	**D065_M** Resolver problema envolvendo noções de probabilidade.

Contextualização

Na última semana demos início ao estudo da probabilidade. Os problemas discutidos eram problemas que envolviam um único evento dentro de um espaço amostral finito. No entanto, o estudo da probabilidade não se limita a esse caso.

Geralmente admitimos que os eventos que possuem algo em comum têm as mesmas chances de acontecer, mas pense na seguinte situação: o Campeonato Carioca de futebol iniciou em 11 de janeiro de 2025. Nessa data o número de campeonatos ganhos por cada time está mostrado ao lado.
O primeiro jogo do campeonato foi entre Nova Iguaçu e Vasco. É justo considerar que cada time tenha 50% de chances de ganhar? É possível garantir que o time que tenha mais chances de ganhar, ganhará o jogo?

Disponível em: https://s2-ge.glbimg.com/tncYpv2ur5CU0dazqzgnOhTK7oE=/0x0:690x1159/1000x0/smart/filters:strip_icc()/i.s3.glbimg.com/v1/AUTH_bc8228b6673f488aa253bbcb03c80ec5/internal_photos/bs/2025/5/q/efV3cYSGAqGNExBZ6izg/info-campeoes-carioca-v02-74732.jpg. Acesso em 10 de janeiro de 2025.

Mas nossas questões com a probabilidade não param por aí. Você já deve ter ido ao pronto atendimento de algum hospital. Será que temos como determinar a probabilidade de o tempo de espera ser menor do que 30 minutos? Ou então, qual a probabilidade da lâmpada nova que você comprou pra sua casa durar mais do que 2 anos? Esse tipo de problema se enquadra nos espaços amostrais contínuos, nesse material não chegaremos a calcular sua probabilidade, apenas reconheceremos sua existência.

A partir desta semana estudaremos como reconhecer os espaços amostrais contínuos ou discretos e eventos equiprováveis ou não equiprováveis. Além disso, iniciaremos o estudo da probabilidade de dois eventos: a união e a probabilidade condicional e a probabilidade dos eventos consecutivos.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

ESPAÇOS AMOSTRAIS DISCRETOS E CONTÍNUOS

Na última semana iniciamos o estudo sobre os eventos aleatórios, eventos que, mesmo repetidos sobre as mesmas condições, não é possível prever o resultado. Considere os seguintes experimentos:

1. Número de árvores em uma reserva florestal;
2. Tipo sanguíneo de um habitante escolhido ao acaso;
3. Tempo de vida de uma lâmpada, selecionada ao acaso, dentro de uma casa;
4. Peso de uma criança após 2 meses tomando um certo medicamento;
5. Tempo de espera de um cliente, escolhido ao acaso, em uma fila de banco durante um dia específico, observando a tolerância máxima de 15 minutos.

Podemos determinar o espaço amostral de cada um dos eventos acima:

- Número de árvores em uma reserva florestal:
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}.$$
- Tipo sanguíneo de um habitante escolhido ao acaso:
$$U = \{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}.$$
- Tempo de vida de uma lâmpada selecionada ao acaso dentro de uma casa:
$$U = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}.$$
- Peso de uma criança após 2 meses tomando um certo medicamento:
$$U = \{p \in \mathbb{R}; p \geq 0\}.$$
- Tempo de espera de um cliente escolhido ao acaso em uma fila de banco durante um dia específico, observando a tolerância máxima de 15 minutos
$$U = \{t \in \mathbb{R}; 0 < t \leqslant 15\} =]0, 15].$$

O que diferencia os experimentos acima são os tipos de espaço amostral que possuem: enquanto os dois primeiros experimentos possuem espaços amostrais discretos, os dois últimos possuem espaços amostrais contínuos.
Confira a diferença entre os dois tipos de espaços amostrais:

Espaço Amostral Discreto

O conjunto é finito ou possui infinitos elementos, porém é contável.

ou

Espaço Amostral Contínuo

O conjunto inclui todos os números de um intervalo da reta real

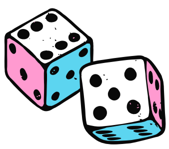
EVENTOS EQUIPROVÁVEIS E NÃO EQUIPROVÁVEIS

Vamos começar com um jogo rápido:

- Inicialmente a turma deve ser dividida em grupos e cada grupo recebe dois dados (pode ser dados digitais acessados pelo QR Code ao lado).
- Cada grupo se divide em 2 times. Cada time escolhe para apostar 3 números, de 0 a 5 no tabuleiro, e os registra na tabela.

Nome dos Participantes	Números Escolhidos

- Decide-se quem começa.
- Na sua vez de jogar, você lança dois dados, calcula a diferença entre os valores obtidos nas faces superiores (em módulo) e registra, no tabuleiro, o respectivo valor.
- O jogo termina após 10 rodadas e o ganhador será aquele que escolheu o número com maior quantidade de espaços registrados com as diferenças.



0										
1										
2										
3										
4										
5										

Prezada Professora,
Prezado Professor,

após o jogo discuta com os estudantes as seguintes questões:

- Quem ganhou? Qual o número escolhido?
- Você acha que o jogo é justo? Por quê?

Ao lançar os dois dados e calcular a diferença entre os números na face superior obtemos o seguinte espaço amostral: U={0, 1, 2, 3, 4, 5}, conforme o esquema abaixo:

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

A partir destes resultados chegamos que:

$$P('Resultado\ é\ 0') = \frac{6}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 2') = \frac{8}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 4') = \frac{4}{36}.$$

$$P('Resultado\ é\ 1') = \frac{10}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 3') = \frac{6}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 5') = \frac{2}{36}.$$

Note que nem todos os eventos unitários acima tem a mesma probabilidade de ocorrer, portanto, o jogo não é justo para todas as escolhas possíveis. O jogador que escolher o número 1 terá mais chances de ganhar do que o jogador que escolheu o número 5. Estes tipos de eventos são ditos *não equiprováveis*.

Evento Equiprovável

Todos os eventos simples do espaço amostral possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

ou

Evento Não Equiprovável

Os eventos simples do espaço amostral possuem probabilidades distintas de ocorrer.

No caso de eventos equiprováveis dizemos que o espaço amostral também é equiprovável, da mesma forma, no caso dos eventos não equiprováveis, dizemos que o espaço amostral também o é.

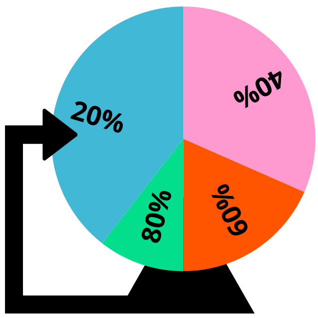
É necessário ter cuidado ao definir os eventos equiprováveis ou não equiprovável, os eventos tratados aqui são apenas os **eventos simples**!

Considere os seguintes experimentos aleatórios:

- Lançar um dado e observar o número da face voltada para cima;
- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.

Caso o dados e a moeda sejam honestos, ambos espaços amostrais são equiprováveis, isto é, no primeiro experimento, a probabilidade da face voltada para cima ser o número 2 ou o número 5 é exatamente a mesma. Da mesma forma, a probabilidade de ocorrer cara ou coroa é exatamente a mesma no lançamento da moeda.

Agora considere o seguinte problema: Uma loja, no mês do seu aniversário, fez uma promoção: após a compra o cliente pode girar a roleta (veja o esquema ao lado) e ganhar um desconto na compra. Conforme você pode notar, a faixa (setor circular) relativa ao desconto de 80% é menor do que a faixa do desconto de 60% que, por sua vez é menor do que a faixa de 40% e esta é menor do que a faixa de 20% de desconto.



Portanto, a probabilidade de o cliente ganhar 20% de desconto não é igual à probabilidade dele ganhar qualquer outro desconto, logo, os eventos são não equiprováveis.

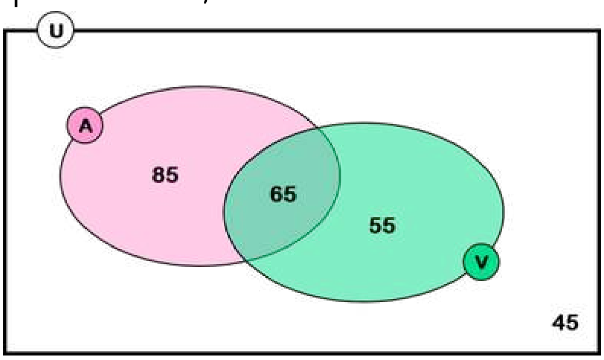
PROBABILIDADE DE UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Considere a seguinte situação: Uma livraria está fazendo uma enquete para averiguar o gosto dos seus leitores, sendo que a cada semana ela promove um "combate" entre dois livros. Os livros escolhidos para esta semana são: O Auto da Compadecida, de Ariano Suassuna, e Vidas Secas, de Graciliano Ramos. Foram entrevistados 250 clientes que passaram pela loja. Depois das entrevistas a livraria divulgou que

- 120 pessoas conheciam a obra Vidas Secas;
- 150 pessoas conheciam a obra O Auto da Compadecida;
- 65 pessoas conheciam as duas obras.

Estamos interessados em responder uma pergunta: quantas pessoas que conhecem O Auto da Compadecida ou Vidas Secas? Bom, poderíamos pensar em somar o número de pessoas que conhecem O Auto da Compadecida e o número de Pessoas que conhecem Vidas Secas, no entanto isso daria 120+150=270, um número maior do que o número de entrevistados. O que estamos esquecendo é que as pessoas que conhecem as duas obras são contadas duas vezes. Portanto, na verdade, devemos retirar 65 de 270: 270-65=205 pessoas. Logo, existem 205 pessoas que conhecem ambas as obras.

O problema pode ser representado num diagrama de Venn, o que facilita a interpretação e, consequentemente, evita cometer erros:

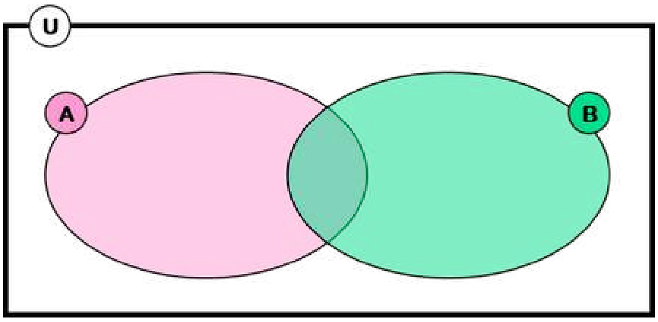


Podemos interpretar o diagrama da seguinte forma: existem 65 pessoas que conhecem ambas as obras ($A \cap V$), assim, existem 120-65=55 pessoas que conhecem apenas Vidas Secas e 150-65=85 pessoas que conhecem apenas O Auto da Compadecida. Além disso, é possível observar que existem 45 pessoas que não conhecem nenhuma das obras, determinado por 250-(85+65+55). Assim, existem 205 pessoas que conhecem O Auto da Compadecida ou Vidas Secas ($A \cup V$).

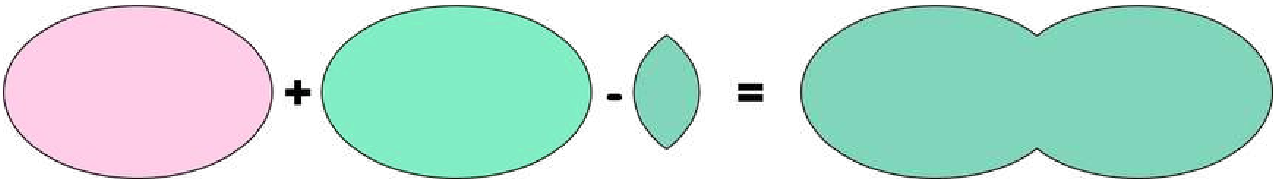
A probabilidade de se selecionar uma pessoa que conhece O Auto da Compadecida ou Vidas Secas é

$$\frac{205}{250} = 0,82 = 82\%.$$

Dados dois conjuntos A e B, subconjuntos de uma espaço U, conforme abaixo:



A união de A e B pode ser observada como:



Que podemos traduzir na seguinte equação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Logo, considerando A e B como eventos de um espaço amostral U, a probabilidade de A ou B acontecer é

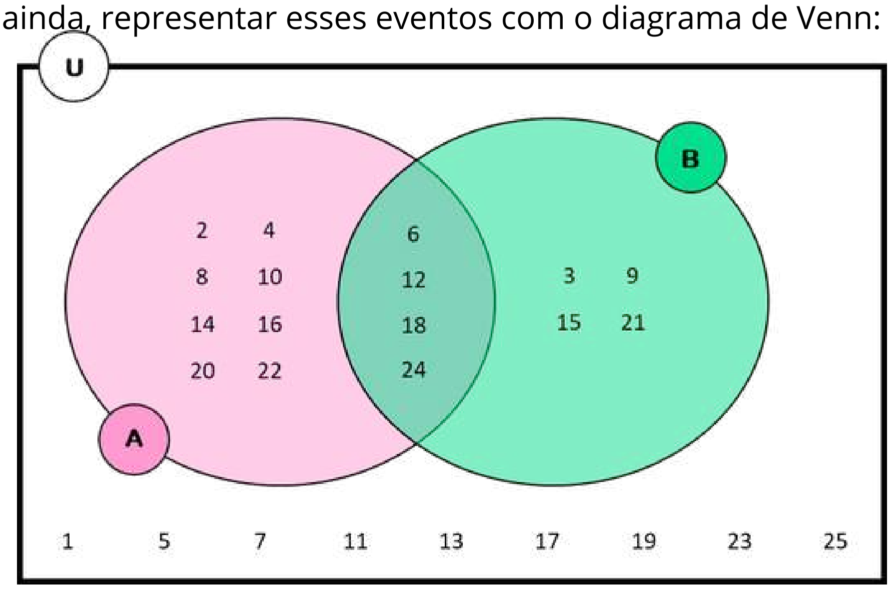
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Considere outra situação: uma urna contem 25 bolas de mesmo tamanho e mesma massa, numeradas de 1 a 25. Suponha que uma delas seja extraída, ao acaso. Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 2 ou de 3?

Vamos inicialmente determinar os eventos A: "o número da bola sorteada ser múltiplo de 2" e B: "o número da bola sorteada ser múltiplo de 3":

$$A = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 24\} \ e \ B = \{3, 6, 9, \cdots, 24\}$$

E podemos, ainda, representar esses eventos com o diagrama de Venn:



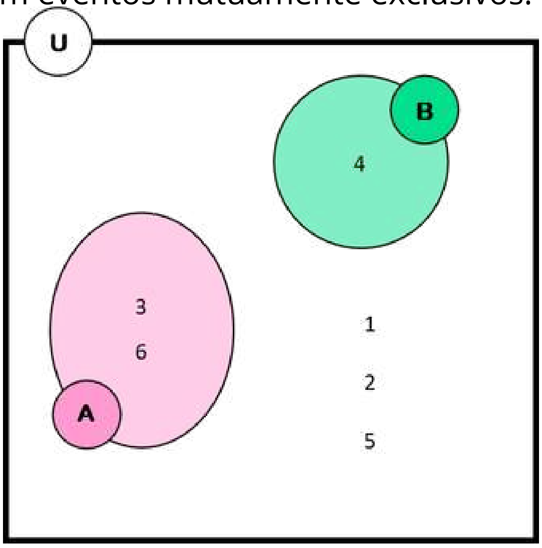
Podemos observar que

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24\}\,.$$

Portanto,

$$P(A \cup B) = \frac{16}{25} = 0,64 = 64\%.$$

Caso os eventos sejam mutuamente exclusivos, isto é, a interseção dos dois eventos é um conjunto vazio, a probabilidade da união de dois evento é a soma das probabilidades individuais.
Na próxima situação, trazemos um problema com eventos mutuamente exclusivos.



Mais uma situação:
Considere que um dado seja lançado e observamos a face voltada para cima, qual a probabilidade de que a face voltada para cima seja um múltiplo de 3 ou de 4?
Defina os eventos *A: "a face voltada para cima é um múltiplo de 3"* e *B: "a face voltada para cima é um múltiplo de 4"*. Assim:

$$A = \{3, 6\}\,; B = \{4\}\ \ e\ A \cup B = \{3, 4, 6\}\,.$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Prezada Professora, Prezado Professor,

Nesta semana utilizamos o diagrama de Venn para solução de problemas. As vídeo aulas presentes aqui, podendo ser acessadas pelo QR Code ao lado, são uma possibilidade de revisão do conteúdo, caso seja necessário.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Escolhendo-se, ao acaso, um número inteiro de 26 a 175, qual a probabilidade de ser escolhido um número que

a) é múltiplo de 5?

b) é múltiplo de 6?

c) é múltiplo de 5 e de 6?

d) é múltiplo de 5 ou de 6?

SOLUÇÃO. O espaço amostral desse evento é U={26, 27, 28, 29, 30, ... , 174, 175}, portanto n(U)=175-26+1=150. Considere os eventos A e B como sendo "escolhe-se um múltiplo de 5 de 26 a 175" e "escolhe-se um múltiplo de 6 de 26 a 175", respectivamente.

a) O menor múltiplo de 5 em U é 30 e o maior múltiplo de 5 em U é 175, além disso sabemos que 5·6=30 e 5·35=175. Portanto, n(A)=35-6+1=30. Assim

$$P(A) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%.$$

b) Usando o raciocínio feito na questão anterior, o menor e maior múltiplo de 6 em U são, respectivamente, 30 e 174, além disso 6·5=30 e 6·29=174. Portanto, n(B)=29-5+1=25. Assim,

$$P(B) = \frac{25}{150} = \frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%.$$

c) Os múltiplos de 5 e de 6, simultaneamente, são os múltiplos de 30 (mmc(5,6)=30). Usando o raciocínio já visto, temos que o menor e o maior múltiplo de 30 em U são, respectivamente, 30 e 150. Além disso 30·1=30 e 30·5=150, logo, n(A⋂B)=5-1+1=5. Portanto,

$$P(A \cap B) = \frac{5}{150} = \frac{1}{30} \approx 0,033 = 3,3\%.$$

d) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, portanto

$$P(A \cup B) = 0,2 + 0,167 - 0,033 = 0,334 = 33,4\%.$$

Prezada Professora, Prezado Professor,

O número de múltiplos de de um número entre 26 e 175 pode ser obtido por uma PA. Vejamos o caso de determinar quanto múltiplos de 6 existe nesse intervalo: ao dividir 26 por 6 obtemos como o resto 2, então faltam 4 unidades para o próximo múltiplo de 6 que é o 30. Dividindo 175 por 6, obtemos resto 1, agora temos que olhar o múltiplo anterior (afinal, o posterior não pertence ao intervalo definido), o último então é o 174. Assim, podemos escrever

$$a_1 = 30,\ r = 6 \ e \ a_n = 174.$$

Daí,

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 174 = 30 + (n-1) \cdot 6$$
$$174 - 30 = (n-1) \cdot 6$$
$$\frac{144}{6} = n - 1 \Rightarrow 24 = n - 1$$
$$n = 25.$$

EXERCÍCIO 2. Numa determinada comunidade a probabilidade de se encontrar uma pessoa idosa é igual a 0,42, a probabilidade de se encontrar uma pessoa com diabetes é igual a 0,26 e a probabilidade de se encontrar um idoso diabético é 0,14. Qual a probabilidade de que se encontre, nessa comunidade, uma pessoa idosa ou diabética?

SOLUÇÃO. Considere os eventos A: “encontrar uma pessoa idosa na comunidade” e B: “encontrar uma pessoa diabética na comunidade”, assim, obtemos

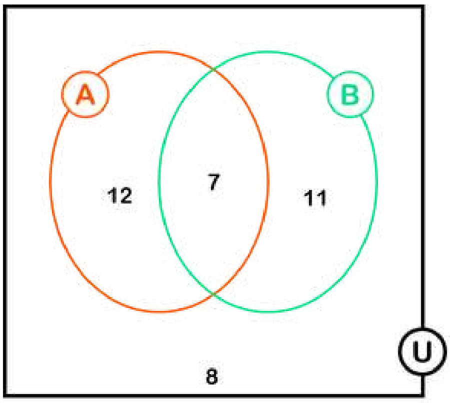
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,42 + 0,26 - 0,14 = 0,54 = 54\%.$$

EXERCÍCIO 3. Marcela pesquisou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB e Rock. Dos 38 entrevistados, temos que:

- 18 gostam de MPB;
- 19 de Rock;
- 7 gostam de MPB e Rock;
- 8 não gostam de nenhum dos gêneros.

Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele goste de rock ou MPB?

SOLUÇÃO. Considere os eventos A: “Sortear um entrevistado que gosta de Rock” e B: “Sortear um entrevistado que gosta de MPB”. Inicialmente vamos construir o diagrama de Venn para o problema:



Portanto,

$$P(A \cup B) = \frac{12 + 7 + 11}{38} = \frac{30}{38} \approx 0,789 = 78,9\%.$$

Outra forma: de todos os entrevistados estamos interessados naqueles que gostam de Rock ou MPB, portanto, basta que, do total, eliminemos aqueles que não gostam de nenhum dos dois gêneros:

$$P(A \cap B) = \frac{38 - 8}{38} = \frac{30}{38} \approx 0,789 = 78,9\%.$$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 6 – Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**

- Probabilidade: p. 123-127.

2. **Volume 5 – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**

- Probabilidade: p. 79-81.

SITE

Portal da Matemática - OBMEP

https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=46

As seção “O que é probabilidade?” e “Ferramentas básicas” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado.

Portal da Matemática - OBMEP

https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=87

As seções “Noções básicas” traz vídeos sobre os conteúdos de conjuntos tratados neste material estruturado.

Atividades

ATIVIDADE 1

Analise as afirmações sobre espaços amostrais discretos e contínuos, indicando se cada uma é verdadeira (V) ou falsa (F):

( ) O espaço amostral de um experimento que envolve a contagem do número de chamadas recebidas em um call center em um dia é discreto.

( ) O espaço amostral de um experimento que mede a temperatura em uma cidade ao longo de um dia é discreto.

( ) O espaço amostral de um experimento que consiste em registrar os resultados de um jogo com 52 cartas é composto por um número finito de resultados.

( ) O espaço amostral da velocidade do vento em uma determinada região, medida em metros por segundo, é contínuo.

( ) O espaço amostral da quantidade de pessoas que entram em uma loja em uma hora específica é contínuo.

A sequência correta que representa as afirmações acima é:

A) V, V, V, F, F
B) V, F, V, V, V
C) V, F, V, V, F
D) F, F, V, V, F
E) F, V, F, V, F

ATIVIDADE 2

Em uma urna, há 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Uma bola será retirada aleatoriamente e, a partir desse experimento, vamos considerar os seguintes eventos:

- Evento **A**: ser sorteada uma bola vermelha;
- Evento **B**: ser sorteada uma bola azul;
- Evento **C**: ser sorteada uma bola verde.

Agora, analise as afirmações abaixo, referente a esse experimento, e identifique a única verdadeira.

A) Os eventos A, B e C são equiprováveis, pois cada um tem a mesma probabilidade de ocorrer.
B) Os eventos A e B são equiprováveis, mas o evento C não é.
C) Os eventos A, B e C não são equiprováveis, pois têm diferentes probabilidades de ocorrência.
D) Os eventos A e C são equiprováveis, mas o evento B não é.
E) Apenas os eventos B e C são equiprováveis.

ATIVIDADE 3

Em um experimento que envolve o tempo de espera para um ônibus, medido em minutos, e que pode variar de 0 a 30 minutos, o espaço amostral é definido por:

A) $U = \{1, 2, 3, ..., 30\}$
B) $U = \{0, 1, 2, ..., 29\}$
C) $U = \{x \mid x \geq 0\}$
D) $U = \{x \mid x < 30\}$
E) $U = [0, 30]$

ATIVIDADE 4

Em um treinamento sobre logística e produção com 20 funcionários de uma empresa, 15 funcionários estão focados em gestão de cadeia de suprimentos, 10 estão interessados em otimização de processos de produção e 5 funcionários estão envolvidos em ambas as áreas. Se um participante for escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ele esteja focado em gestão de cadeia de suprimentos ou otimização de processos de produção?

A) 0,55
B) 0,75
C) 0,85
D) 0,95
E) 1,00

ATIVIDADE 5

Analise as afirmações a seguir sobre eventos equiprováveis e não equiprováveis.

I - No experimento aleatório "lançamento de uma moeda honesta", considere os eventos "Sair cara" e "Sair coroa". Podemos dizer que são eventos equiprováveis, pois ambos os resultados têm a mesma probabilidade de ocorrer (50%).

II - No experimento "retirada de uma carta de um baralho padrão de 52 cartas", os eventos "sair uma carta preta" e "sair uma carta vermelha" são considerados equiprováveis, já que, dentre as 52 cartas, há 26 cartas de cada uma dessas cores.

III - O evento "lançamento de um dado justo de seis faces" é não equiprovável, pois cada face tem a mesma probabilidade de aparecer, que é dada por $\frac{1}{6}$.

IV - Os eventos A e B são equiprováveis se ambos têm quantidades diferentes de resultados possíveis em um experimento, independentemente de quantos resultados totais existem.

V - Em um dado justo de seis faces, o evento de obter um número par (2, 4, 6) e o evento de obter um número ímpar (1, 3, 5) são equiprováveis, pois ambos têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Assinale a alternativa que contém apenas exemplos corretos.

A) Somente as alternativas I, II e IV estão corretas.
B) Somente as alternativas III e V estão corretas.
C) Somente as alternativas I, II e V estão corretas.
D) Somente as alternativas II, IV e V estão corretas.
E) Todas as alternativas estão corretas.

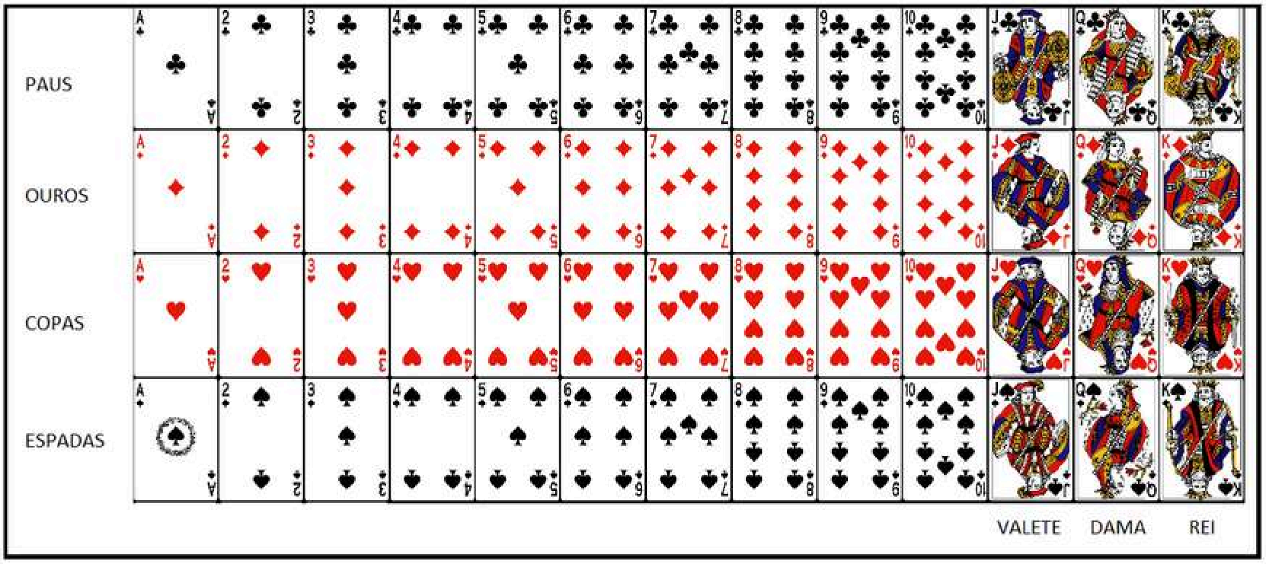
ATIVIDADE 6

Em uma caixa, foram colocadas 30 bolas numeradas de 1 a 30. Uma delas será retirada ao acaso. Qual é o valor aproximado da probabilidade de que um número escolhido aleatoriamente seja um divisor comum de 15 e 24?

A) 0,066
B) 0,1
C) 0,166
D) 0,2
E) 0,333

ATIVIDADE 7

Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um rei?



Fonte: https://fantasia.fandom.com/pt/wiki/Baralho

ATIVIDADE 8

Na CEEFMTI Professora Maria Penedo, localizada no bairro Itacibá, no município de Cariacica, **100 estudantes** se inscreveram para realizar o ENEM 2025. Esses estudantes têm a opção de utilizar três linhas de ônibus diferentes para chegar ao local da prova:

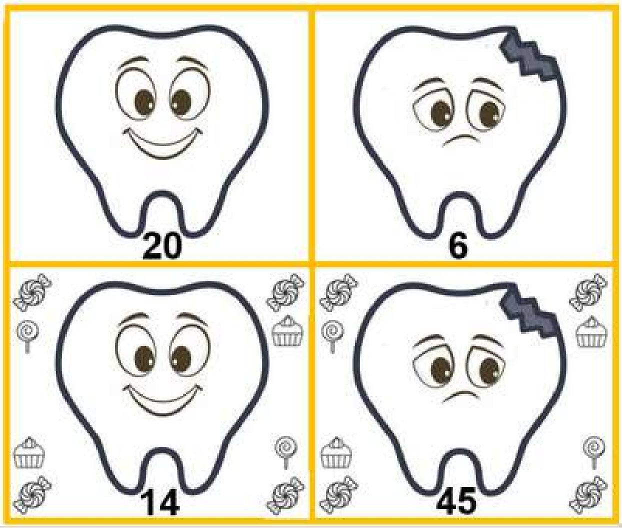
- 504: Terminal de Itacibá/Terminal de Laranjeiras (Via Reta da Penha)
- 505: Terminal de Itacibá/Terminal de Laranjeiras (Via Camburi)
- 506: Terminal de Itacibá/Terminal de Laranjeiras (Via Maruípe)

Observou-se que **60 estudantes** poderiam pegar a linha 504; **32 estudantes** a linha 505; e **45 estudantes** a linha 506. Além disso, **10 estudantes** poderiam utilizar tanto a linha 504 quanto a linha 505, e **25 estudantes** as linhas 504 e 506 e **8 estudantes** as linhas 505 e 506. Apenas **6 estudantes** poderiam utilizar as três linhas.

Qual é a probabilidade de se escolher um estudante ao acaso e esse estudante poder utilizar as linhas 505 ou 506?

ATIVIDADE 9

Um pesquisador, em colaboração com um dentista, analisou os dentes de crianças em uma escola pública localizada no distrito de Guaraná, em Aracruz (ES). Para ilustrar a pesquisa, foi elaborado um diagrama que permitia observar quais crianças apresentavam cáries e quais consumiam doces (balas, pirulitos, bombons etc.).



		CÁRIES NÃO	CÁRIES SIM	TOTAL
DOCES	NÃO	20	6	26
DOCES	SIM	14	45	59
	TOTAL	34	51	

Responda:

A) Escolhendo uma criança aleatoriamente, determine a probabilidade (em porcentagem) dela ter cáries.

B) Escolhendo uma criança aleatoriamente, determine a probabilidade (em porcentagem) dela não ter cáries.

ATIVIDADE 10

(Enem 2017 - Adaptada) Um programa de televisão criou um perfil em uma rede social, e a ideia era de que esse perfil fosse sorteado para um dos seguidores, quando esses fossem em número de um milhão. Agora que essa quantidade de seguidores foi atingida, os organizadores perceberam que apenas 80% deles são realmente fãs do programa. Por conta disso, resolveram que todos os seguidores farão um teste, com perguntas objetivas referentes ao programa, e só poderão participar do sorteio aqueles que forem aprovados. Estatísticas revelam que, num teste dessa natureza, a taxa de aprovação é de 90% dos fãs e de 15% dos que não são fãs.

De acordo com essas informações, determine a razão entre a probabilidade de que um fã seja sorteado e a probabilidade de que o sorteado seja alguém que não é fã do programa.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Combinatória e Probabilidade. 8. ed., São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE; Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** Análise combinatória, probabilidade e computação. 1 ed. São Paulo: Ática, 2020.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 5:** combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2017 - Exame Nacional do Ensino Médio 2017:** 2º dia. Brasília: INEP, 2017. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_7_prova_azul_12112017.pdf. Acesso em: 09 jan. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

CÁLCULO DE PROBABILIDADES: PROBABILIDADE CONDICIONAL

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT311 Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	• Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e expressá-la na forma de fração, decimal e percentual. • Compreender a noção de dependência de eventos (probabilidade condicional) e calcular probabilidades usando esse conceito. • Resolver situações problema envolvendo probabilidade condicional.	**D065_M** Resolver problema envolvendo noções de probabilidade.

Contextualização

Na semana anterior jogamos um jogo da subtração de dados: cada grupo teve de escolher dois números entre 0 e 5, vimos também que as probabilidades de ocorrência dos possíveis resultados não eram equiprováveis, vejamos:

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$P('Resultado\ é\ 0') = \frac{6}{36}.$ $P('Resultado\ é\ 2') = \frac{8}{36}.$ $P('Resultado\ é\ 4') = \frac{4}{36}.$

$P('Resultado\ é\ 1') = \frac{10}{36}.$ $P('Resultado\ é\ 3') = \frac{6}{36}.$ $P('Resultado\ é\ 5') = \frac{2}{36}.$

Se você tivesse que escolher um número para apostar, o ideal seria apostar no número 1, pois possui a maior probabilidade de vitória. Vamos ver os resultados considerando que no primeiro dado tenha saído o número 4, vejamos quais são os resultados possíveis:

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
4	3	2	1	0	1	2

$P('Resultado\ é\ 0') = \frac{1}{6}.$ $P('Resultado\ é\ 2') = \frac{2}{6}.$ $P('Resultado\ é\ 4') = \frac{0}{6} = 0.$

$P('Resultado\ é\ 1') = \frac{2}{6}.$ $P('Resultado\ é\ 3') = \frac{1}{6}.$ $P('Resultado\ é\ 5') = \frac{0}{6} = 0.$

Tivemos agora uma pequena mudança no nosso panorama: agora se você escolher os números 1 ou 2 você tem iguais chances de ganhar, enquanto se escolher os números 4 ou 5 você não tem chance alguma de ganhar.

Nesta semana estudaremos esse tipo de situação: a probabilidade condicional.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Observando as fichas clínicas em um consultório oftalmológico, verificou-se que foram atendidos em certo dia 40 pacientes, dos quais 14 têm hipermetropia, 21 têm miopia e 8 têm ambos os problemas de visão.

Em um experimento aleatório equiprovável, a ficha de um dos pacientes será sorteada para que ele responda, por telefone, a um questionário sobre satisfação do atendimento. Qual é a probabilidade de o paciente sorteado ter hipermetropia? E qual a probabilidade de que o paciente possua os dois problemas de visão?

Considere H o evento no qual o paciente sorteado tem hipermetropia e M o evento em que o paciente tem miopia, dessa forma, a probabilidade de o paciente sorteado ter hipermetropia é

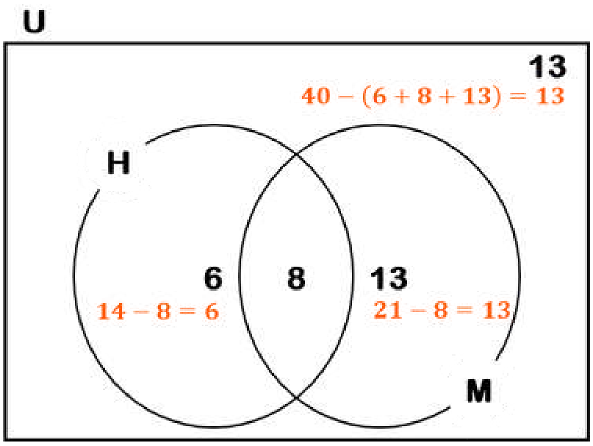
$$P(H) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = 0,35 = 35\%.$$

Já a probabilidade de que o paciente tenha ambos os problemas de visão é

$$P(H \cap M) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%.$$

Agora considere a seguinte situação: o paciente selecionado tem hipermetropia, qual a probabilidade de que ele tenha, também, miopia?

Para responder a essa questão, construir o diagrama de Venn pode ajudar:



Assim, a probabilidade de que o paciente tenha miopia, sabendo que ele tenha hipermetropia é

$$P(M|H) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0,57 = 57\%.$$

Probabilidade de o paciente ter miopia (M) dado que (|) ele tenha hipermetropia (H)

Agora observe um detalhe:

$$\frac{P(H \cap M)}{P(H)} = \frac{0,2}{0,35} \approx 0,57 = 57\% = P(M|H).$$

Esse tipo de problema é chamado de probabilidade condicional:

Probabilidade condicional

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável U, finito e não vazio, denominamos de probabilidade condicional de B em relação a A, a probabilidade de que ocorra o evento B dado que o evento A tenha ocorrido. Essa probabilidade, indicada por P(B|A), é dada por

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Os problemas de probabilidade condicional podem ser resolvidos sem o uso da fórmula apresentada acima, como feito no nosso exemplo introdutório.

Vejamos um outro exemplo: um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

- Já voou antes?
- Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados no quadro seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado antes	Total
Não conhecia Natal	**83**	**22**	**105**
Já conhecia Natal	**23**	**12**	**35**
Total	**106**	**34**	**140**

Qual a probabilidade de selecionarmos, ao acaso, um passageiro que já conhecia Natal sabendo que ele estava voando pela primeira vez?

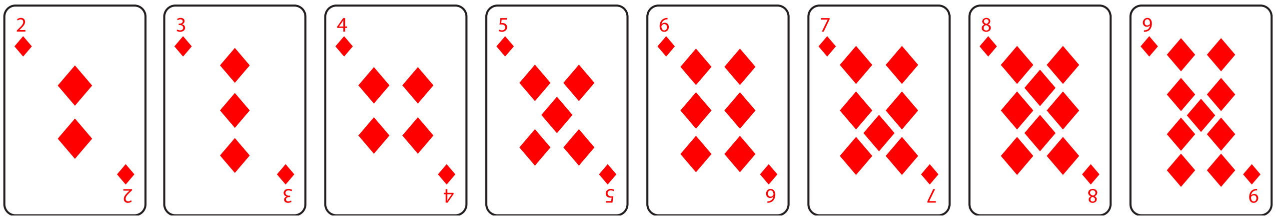
Considere os eventos N: “o passageiro conhece Natal” e V: ”o passageiro está voando pela primeira vez”. Sabemos que o passageiro está voando pela primeira vez, portanto, o espaço amostral não é 140 passageiros, mas sim 106. Sabendo que o passageiro está voando pela primeira vez, devemos determinar quantos desses passageiros já conheciam Natal: 23 passageiros.

Assim, probabilidade de selecionarmos, ao acaso, um passageiro que já conhecia Natal sabendo que ele estava voando pela primeira vez é

$$P(N|V) = \frac{23}{106} \approx 0,217 = 21,7\%.$$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Considere que, de um baralho comum, tenham sido separadas as 9 cartas numéricas de naipe ouros, conforme mostrado abaixo. Essas cartas foram colocadas sobre uma mesa com a face numérica voltada para baixo e, em seguida, embaralhadas. Uma dessas cartas foi retirada ao acaso e verificou-se que o número sorteado era par. Qual é a probabilidade de esse número ser menor do que 7?



SOLUÇÃO. Como sabemos que o número sorteado era par, nosso espaço amostral é redefinido para U={2, 4, 6, 8}. Considere o evento A: "o número sorteado é menor do que 7", assim, dado que o número é par, A={2, 4, 6}. Portanto,

$$P(A|'número\ é\ par') = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%.$$

Prezada Professora, Prezado Professor,
os problemas de probabilidade condicional podem ser resolvidos das mais diversas formas. Acreditamos que a solução sem lançar mão da fórmula, usando uma abordagem mais interpretativa favoreça o desenvolvimento de habilidades matemáticas e de interpretação, por isso a usamos com mais frequência nesse material. Nada impede que você use a fórmula e lance mão de problemas em sala que ela seja essencial na solução, como o **exercício 2**.

EXERCÍCIO 2. Numa determinada comunidade a probabilidade de se encontrar uma pessoa idosa é igual a 0,42, a probabilidade de se encontrar uma pessoa com diabetes é igual a 0,26 e a probabilidade de se encontrar um idoso diabético é 0,14. Qual a probabilidade de que se encontre, nessa comunidade, uma pessoa diabética, sabendo que ela é idosa?

SOLUÇÃO. Considere os eventos A: "encontrar uma pessoa idosa na comunidade" e B: "encontrar uma pessoa diabética na comunidade", assim, obtemos

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,14}{0,42} \approx 0,333 = 33,3\%.$$

EXERCÍCIO 3. Considere que uma peça seja retirada aleatoriamente de um jogo de dominó comum e completo. Qual é a probabilidade de, ao adicionar os pontos das duas partes dessa peça, a soma ser:

a) igual a 6?

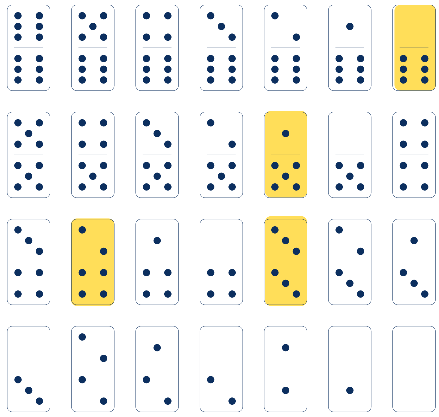
b) igual a 8, sabendo que a peça tem 5 pontos em uma das partes?

c) igual a 6, sabendo que a peça tem uma quantidade ímpar de pontos em, pelo menos, uma das partes?

SOLUÇÃO.

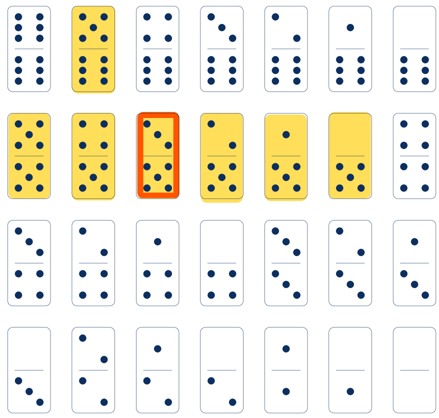
a) Considere o evento A: "a soma dos pontos da peça é 6". Ao lado, temos marcado todas as peças que atendem ao evento. Assim, n(U)=28 e n(A)=4, logo

$$P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7} \approx 0,143 = 14,3\%.$$



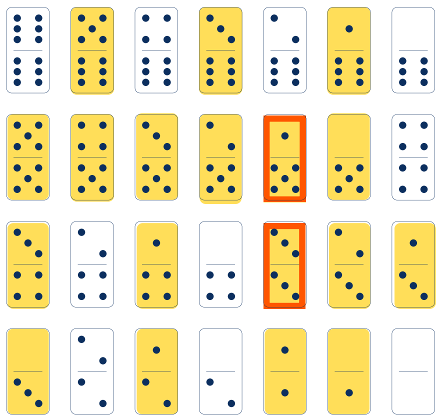
b) Considere o evento A: "a soma dos pontos da peça é 8". No entanto, sabemos que uma das partes da peça possui o número 5, assim o espaço amostral é reduzido e n(U)=7, conforme as peças marcadas ao lado. Das 6 peças marcadas, apenas uma soma 8 (a peça 5|3), logo, n(A)=1, logo

$$P(A) = \frac{1}{7} \approx 0,143 = 14,3\%.$$



c) Considere o evento A: "a soma dos pontos da peça é 6". No entanto, sabemos que a peça tem uma quantidade ímpar de pontos em uma das partes, assim o espaço amostral é reduzido e n(U)=18, conforme as peças marcadas ao lado. Das 18 peças marcadas, apenas duas somam 6, logo, n(A)=2, logo

$$P(A) = \frac{2}{18} \approx 0,111 = 11,1\%.$$



Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 6 – Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
- Probabilidade: p. 130-136.
2. **Volume 5 – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
- Probabilidade: p. 82-84.

SITE

Portal da Matemática - OBMEP

https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=47

A seção "Probabilidade condicional" traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado.

CONEXÕES

Probabilidade e Genética

Sugerimos o texto "Aplicações da probabilidade à Genética" (páginas 89 e 90) como um recurso para mostrar conexões entre Matemática e Biologia. Além da parte de leitura, o texto traz algumas questões sobre o tema. Vislumbramos que este material possa ser uma possibilidade de realização de tarefa juntamente com o professor ou professora de Biologia.

Atividades

ATIVIDADE 1

Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é observado. Sabendo que o número observado é um número par, qual é a probabilidade de que esse número seja o 4?

ATIVIDADE 2

Uma empresa multinacional abriu um processo de contratação de funcionários para trabalhar em alguns países. Em uma classificação prévia, foram selecionados 174 homens e 186 mulheres, dos quais:

	Falam inglês	Falam mandarim	Falam hindi
Homem	92	35	47
Mulher	101	33	52

Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabendo que essa pessoa fala hindi, qual é a probabilidade de que seja um homem?

ATIVIDADE 3

Uma loja de cosméticos promoveu um sorteio que consistia em premiar as 100 primeiras pessoas que entrassem na loja durante a semana que antecedia o Natal. Cada uma dessas pessoas ganharia um número (inteiro) para o sorteio, compreendido entre 1 e 100. Qual é a probabilidade de o número sorteado ser par, dado que ele é menor do que 30?

ATIVIDADE 4

Um biólogo monitora 25 tartarugas marinhas, sendo 16 da espécie tartaruga-cabeçuda (*Caretta caretta*) e 9 da espécie tartaruga-de-couro (*Dermochelys coriacea*). Em janeiro de 2025, esse biólogo observou que 6 tartarugas-cabeçudas e 2 tartarugas-de-couro estiveram na praia de Regências, localizada em Linhares-ES, durante o período de desova. Qual é a probabilidade de que uma tartaruga escolhida, aleatoriamente, seja da espécie tartaruga-de-couro (*Dermochelys coriacea*), dado que ela desovou na praia de Regências?

ATIVIDADE 5

A ONU e seus parceiros no Brasil estão trabalhando para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Esses objetivos são 17, ambiciosos e interconectados, que abordam os principais desafios de desenvolvimento enfrentados por pessoas no Brasil e no mundo.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Fonte: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs

A tabela a seguir destaca a destinação dos recursos provenientes do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES) para que o Brasil cumpra suas metas relacionadas aos ODS.

Contribuição do BNDES

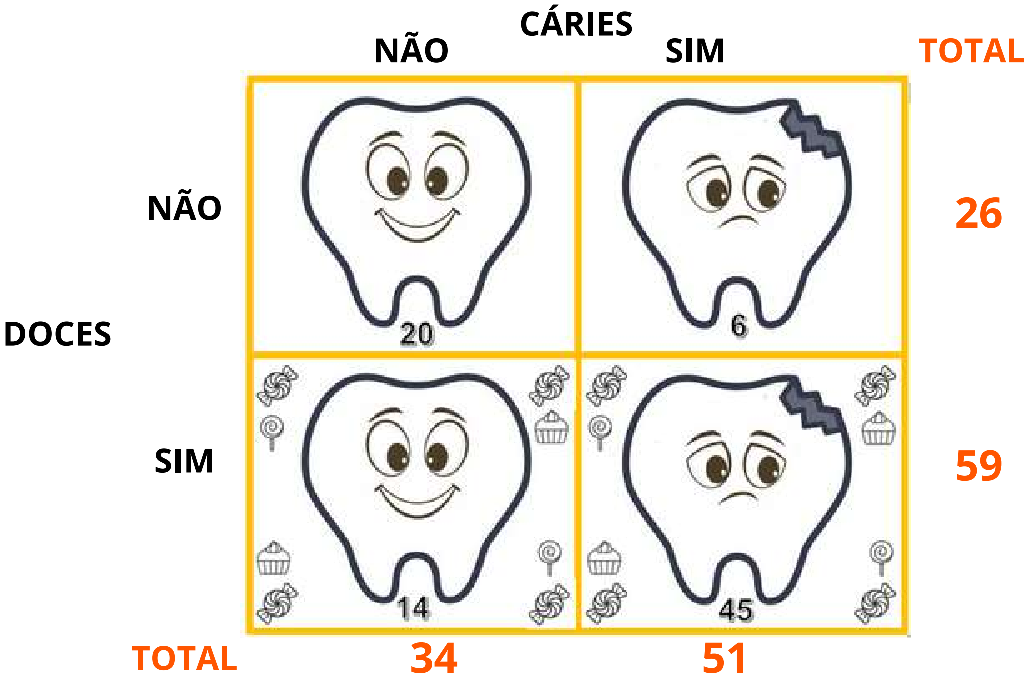
ODS	DESEMBOLSO (R$)
ODS 9	54 354 611 193
ODS 8	38 184 537 622
ODS 7	17 379 929 516
ODS 13	17 218 122 146
ODS 10	13 257 349 232
ODS 2	12 477 002 222
ODS 11	12 347 599 847
ODS 17	12 274 448 754
ODS 1	9 404 084 407
ODS 12	8 943 759 955
ODS 6	3 272 986 410
ODS 3	1 499 250 224
ODS 15	1 341 451 493
ODS 14	921 273 334
ODS 4	299 875 689
ODS 16	223 117 043
ODS 5	12 180 001
TOTAL	203 411 579 088

Fonte: https://bndes.gov.br/wps/portal/site/home/desenvolvimento-sustentavel/compromisso/objetivo1-conteudo (adaptado)

Para apurar tais valores, o Tribunal de Contas da União (TCU) escolheu uma ODS aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que a ODS escolhida promova ações contra mudança global do clima, dado que tenha recebido mais de 10 bilhões de investimento?

ATIVIDADE 6

Um pesquisador, em colaboração com um dentista, analisou os dentes de crianças em uma escola pública localizada no distrito de Guaraná, em Aracruz (ES). Para ilustrar a pesquisa, foi elaborado um diagrama que permitia observar quais crianças apresentavam cáries e quais consumiam doces (balas, pirulitos, bombons etc.).



Qual é a probabilidade de que uma criança escolhida ao acaso tenha cáries, dado que ela não consome doces?

A) 0,12
B) 0,23
C) 0,46
D) 0,77
E) 0,98

ATIVIDADE 7

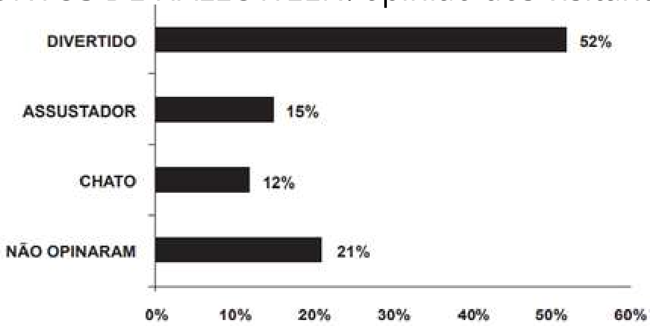
Em uma reserva florestal, existem 700 árvores de espécies nativas e 300 árvores de espécies exóticas, totalizando 1 000 árvores. Sabe-se que 40% das árvores nativas e 10% das árvores exóticas estão em risco de extinção. Qual é, aproximadamente, a probabilidade de uma árvore escolhida aleatoriamente ser nativa, dado que ela está em risco de extinção?

A) 8,30%
B) 32,06%
C) 65,14%
D) 80,25%
E) 90,32%

ATIVIDADE 8

(Enem 2012) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

CONTOS DE HALLOWEEN: opinião dos visitantes



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

A) 0,09.
B) 0,12.
C) 0,14.
D) 0,15.
E) 0,18.

ATIVIDADE 9

(Enem 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{5}{14}$

ATIVIDADE 10

Dois dados foram lançados, e os seguintes eventos foram observados:

- **Evento A:** Um dado mostrou o resultado (face para cima) igual a 2.
- **Evento B:** A soma dos pontos nos dois dados é igual a 6.

Dessa forma, o valor de **P(A|B)** é:

A) 3%
B) 14%
C) 17%
D) 20%
E) 25%

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Combinatória e Probabilidade. 8. ed., São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

Referências

ATIVIDADES

BNDES - Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social. Ministério da Fazenda. P**romover o desenvolvimento sustentável no Brasil, apoiando o atingimento dos ODS**. Rio de Janeiro: BNDES, 2024. Disponível em: https://bndes.gov.br/wps/portal/site/home/desenvolvimento-sustentavel/compromisso/objetivo1-conteudo. Acesso em: 09 jan. 2025.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** estatística, combinatória e probabilidade. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE; Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** Análise combinatória, probabilidade e computação. 1 ed. São Paulo: Ática, 2020.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 5:** combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2012 - Exame Nacional do Ensino Médio 2012:** 2º dia. Brasília: INEP, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia2_caderno5_amarelo.pdf.pdf. Acesso em: 09 jan. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2013 - Exame Nacional do Ensino Médio 2013:** 2º dia. Brasília: INEP, 2013. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia2_caderno5_amarelo.pdf.pdf. Acesso em: 09 jan. 2025.