GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT403 - Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	• Construir tabelas de valores para funções exponenciais e logarítmicas, explorando o comportamento numérico de cada uma. • Resolver problemas envolvendo funções logarítmicas em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. • Comparar, com ou sem auxílio de software, gráficos de uma função exponencial e sua respectiva inversa (função logarítmica), expressando a relação entre potenciação e logaritmo de números reais de mesma base. • Identificar e descrever os conceitos de domínio, imagem e crescimento em funções exponenciais e logarítmicas.	D088_M Utilizar função exponencial na resolução de problemas.

Caro(a) Professor(a),

Informamos que, a partir da Quinzena 14, o Material Estruturado incluirá todo o conteúdo relativo a esta quinzena, de modo a não haver mais duas capas e sintetizar o conteúdo em um único volume. Esperamos, assim, que essa mudança facilite o seu trabalho, planejamento e sua organização em sala de aula.

*Informamos, ainda, que o período de **22 a 26/09** será destinado à **preparação para a 3.ª edição** da Avaliação de Monitoramento da Aprendizagem **(AMA)**; por esse motivo, o material foi reduzido.*

Contextualização

Naturalmente no estudo da função exponencial e equação exponencial podemos nos deparar com situações em que, aparentemente, não encontramos uma solução de forma simples, observe a equação abaixo:

$$2^{x+1} = 5^x$$

Mesmo com o que vimos nas semanas anteriores, não conseguimos determinar uma solução de forma simples para essa equação. Neste caso, precisamos de uma ferramenta um pouco mais avançada para resolver esse tipo de problema: o **logaritmo**!

Os logaritmos surgiram no século XVII, desenvolvidos principalmente por John Napier e Jost Bürgi, de forma independente e quase simultaneamente, com o intuito de simplificar os cálculos, já que transformam multiplicações e divisões em operações mais simples de soma e subtração.

Com a evolução das ciências, os logaritmos ganharam a forma de função e diversas aplicações de extrema importância na nossa vida. Vejamos algumas dessas aplicações:

- a escala Richter, usada para mensurar a magnitude de um terremoto, relaciona a energia liberada pelo terremoto e sua magnitude;
- a escala de pH, usada para medir a acidez ou alcalinidade de soluções na química;
- a intensidade sonora, em decibel, muito usada para analisar condições de trabalho em ambientes com muito barulho;
- a relação entre luminosidade e a profundidade em lago.

Nesta semana, nosso objeto de estudo será o logaritmo, uma ferramenta extremamente importante para o estudo do mundo natural e seus impactos na vida humana.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

LOGARITMO

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c é o valor do **logaritmo do número b na base a**. Podemos representar essa definição da seguinte forma:

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Por exemplo,

1. $log_2 4 = 2, \text{ pois } 2^2 = 4.$
2. $log_2 32 = 5, \text{ pois } 2^5 = 32.$
3. $log_3 27 = 3, \text{ pois } 3^3 = 27.$
4. $log_8 1 = 0, \text{ pois } 8^0 = 1.$
5. $log_{10} 10 = 1, \text{ pois } 10^1 = 10.$
6. $log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, \text{ pois } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4.$

> Se não houver um número identificando a base, isso significa que a base é 10. Chamamos esse logaritmo de **logaritmo decimal**. Veja abaixo:
>
> $$log 0,1 = -1, \text{ pois } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad log 100 = 2, \text{ pois } 10^2 = 100.$$

Sendo **a**, **b**, **c** e **m** números reais, em que **a**, **b** e **c** são positivos e **a** é diferente de 1, a partir da definição de logaritmo acima podemos estabelecer as seguintes propriedades:

Propriedade	Exemplos
$log_a 1 = 0$	$log_\pi 1 = 0$; $log 1 = 0$
$log_a a = 1$	$log_9 9 = 1$; $log 10 = 1$
$log_a a^m = m$	$log_4 4^3 = 3$; $log_5 5^7 = 7$
$a^{log_a b} = b$	$2^{log_2 8} = 8$
$log_a b^m = m \cdot log_a b$	$log_3 27^6 = 6 \cdot log_3 27 = 6 \cdot 3 = 18$
$log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$	$log_3 9 = log_3(x+1) \Leftrightarrow 9 = x+1 \Leftrightarrow x = 8$
$log_a (b \cdot c) = log_a b + log_a c$	$log_2 (32 \cdot 64) = log_2 32 + log_2 64 = 5 + 6 = 11$
$log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c,\ c \neq 0$	$log (0,001) = log\left(\frac{1}{1000}\right) = log 1 - log 1000 = 0 - 3 = -3$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = log_a x,$$

ou seja, a função que associa a cada número real positivo x ao número real $log_a x$.

De modo geral, temos que o **domínio** da função logarítmica dada por $f(x) = log_a x$ é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e sua **imagem** é $Im(f) = \mathbb{R}$.

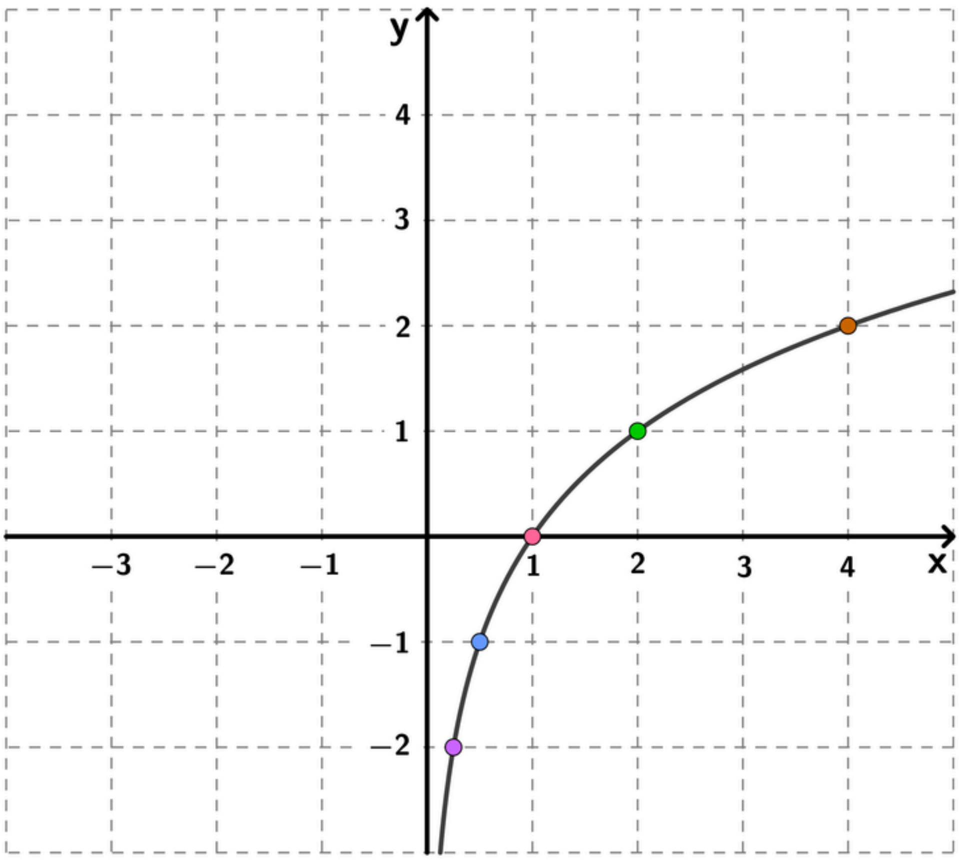
Vejamos alguns exemplos da função logarítmica e seus respectivos gráficos:

1 $f(x) = log_2 x$

Vamos, inicialmente, construir a tabela de valores:

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$

Assim, o gráfico dessa função é dado por:

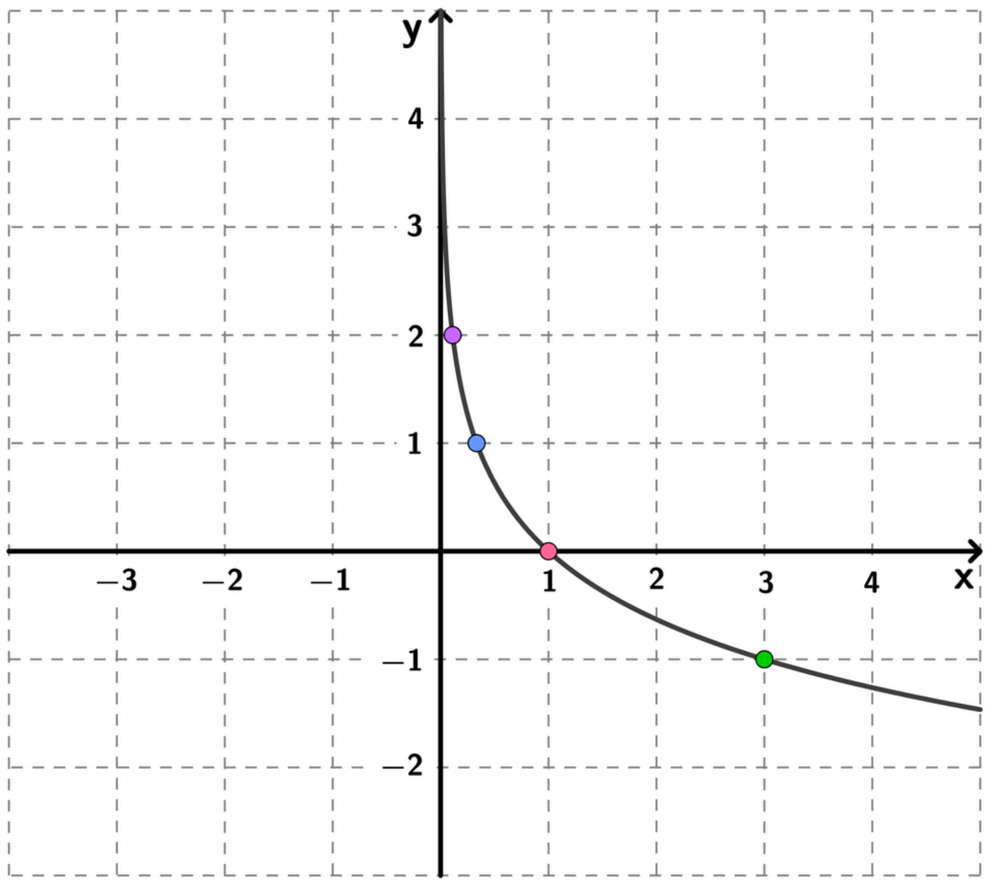


2 $f(x) = log_{\frac{1}{3}}x$

Vamos, inicialmente, construir a tabela de valores:

x	$\mathbf{f(x) = log_{\frac{1}{3}}x}$
$\frac{1}{9}$	$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right) = 2$
$\frac{1}{3}$	$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$
1	$\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$
3	$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

Assim, o gráfico desta função é dado por:



Esses dois exemplos nos levam à seguinte propriedade da função logarítmica:

Se a base for um número maior do que 1, a função logarítmica é crescente, enquanto que, se a base for um número maior do que 0 e menor do que 1, a função logarítmica é decrescente

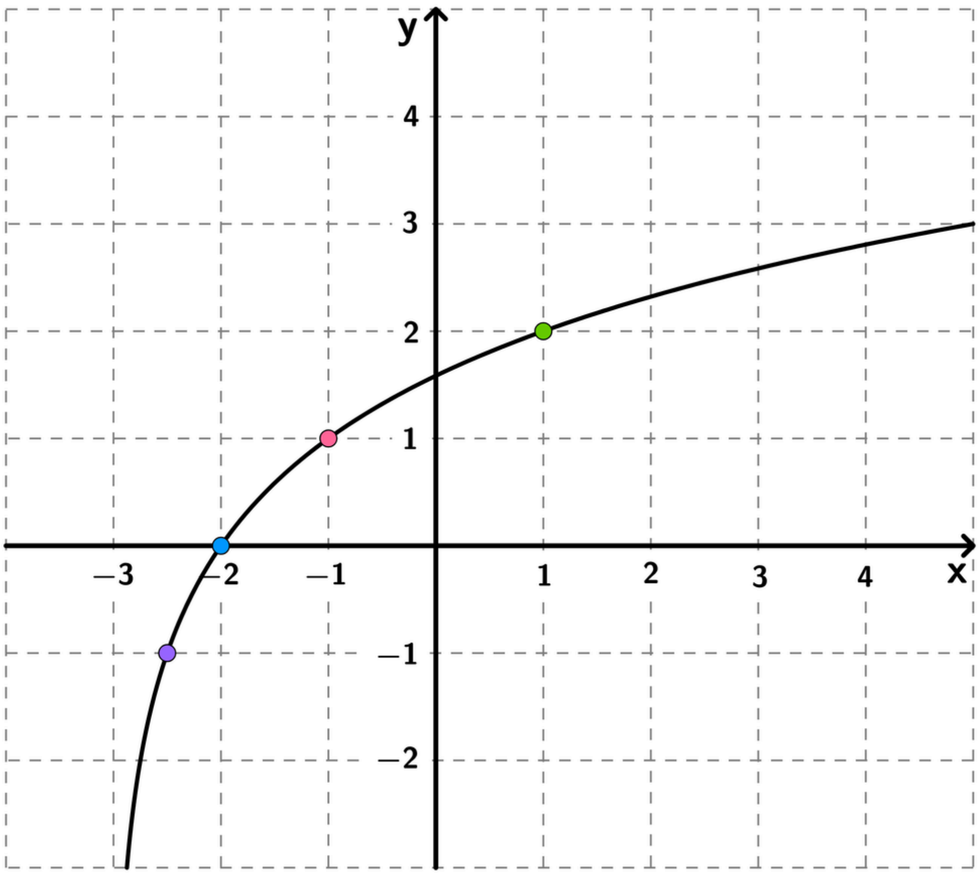
3 $f(x) = log_2(x+3)$

Observe que, diferentemente dos exemplos anteriores, queremos determinar o logaritmo de x+3 na base 2. Neste caso, deve-se ter atenção especial na definição do domínio: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x+3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$.

Desta forma, a função está definida para qualquer valor de x maior do que -3. Dessa forma, podemos construir nossa tabela de valores:

x	$\mathbf{f(x) = \log_2(x+3)}$
$-\frac{5}{2}$	$\log_2\left(\frac{5}{2}+3\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
-2	$\log_2(-2+3) = \log_2 1 = 0$
-1	$\log_2(-1+3) = \log_2 2 = 1$
1	$\log_2(1+3) = \log_2 4 = 2$

Assim, o gráfico desta função é dado por:



Apesar do domínio ser diferente das demais funções observadas anteriormente, o conjunto imagem não se alterou: $Im(f) = \mathbb{R}$.

RELAÇÃO ENTRE O LOGARITMO E A EXPONENCIAL

Voltemos, brevemente à definição do logaritmo apresentada anteriormente:

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c é o valor do **logaritmo do número** b **na base** a. Podemos representar essa definição da seguinte forma:

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

A partir daí, você pode notar que podemos representar a relação existente entre os números de duas formas: a forma logarítmica e a forma exponencial. Veja abaixo:

Forma Logarítmica

$$log_a b = c$$

a : *Base*

b : *Logaritmando*

c : *Logaritmo*

Forma Exponencial

$$a^c = b$$

a : *Base*

b : *Potência*

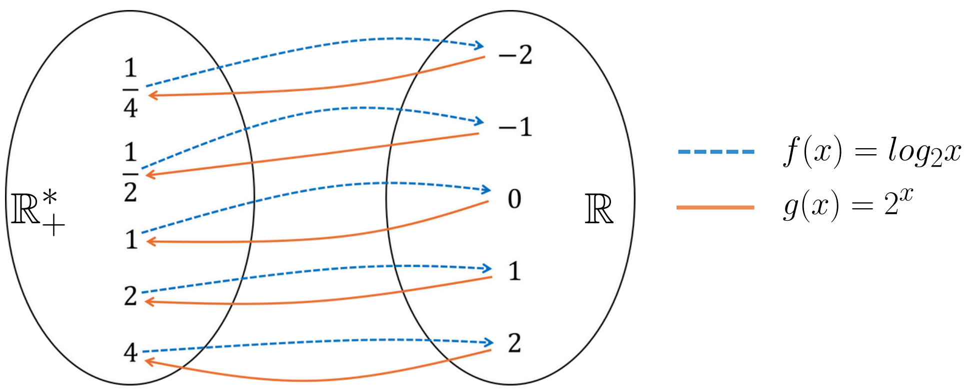
c : *Expoente*

Essas duas formas de expressar a mesma relação nos conduz a estabelecer uma relação entre as funções logarítmica e exponencial.
Observe a tabela de valores abaixo:

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$

x	$g(x) = 2^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$

Note que o resultado da exponencial aplicada ao resultado da função logarítmica sempre retorna o valor inicial de x que escolhemos.
Podemos representar esta tabela pelo seguinte diagrama:

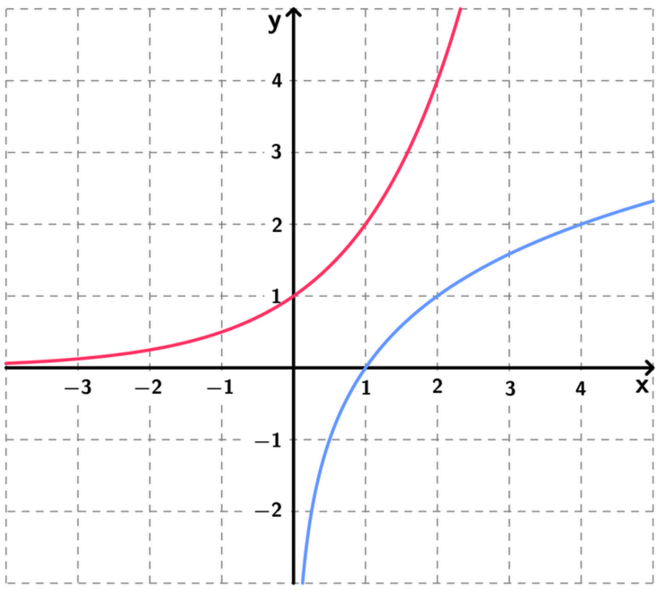


Mas o que isso significa? Existe uma relação entre a função exponencial e logarítmica em que uma reverte o que a outra faz, ou seja, a exponencial faz um movimento contrário ao movimento da logarítmica, e vice-versa. Neste caso, dizemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, e vice-versa.

Observe abaixo alguns pares de funções logarítmicas e exponenciais que estão relacionadas:

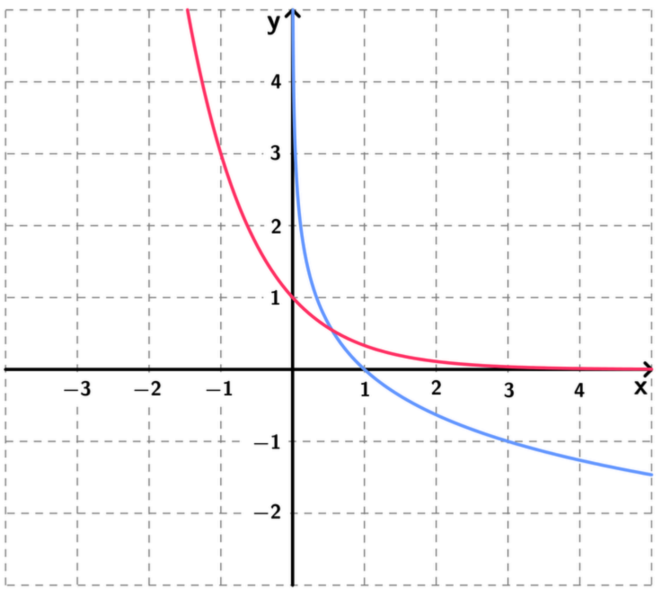
$f(x) = log_2 x$	$f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$	$f(x) = log x$
$g(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$g(x) = 10^x$

Como essas funções aparecem em pares, podemos representá-las, também, em pares no plano cartesiano. Observe a seguir:



$f(x) = log_2 x$

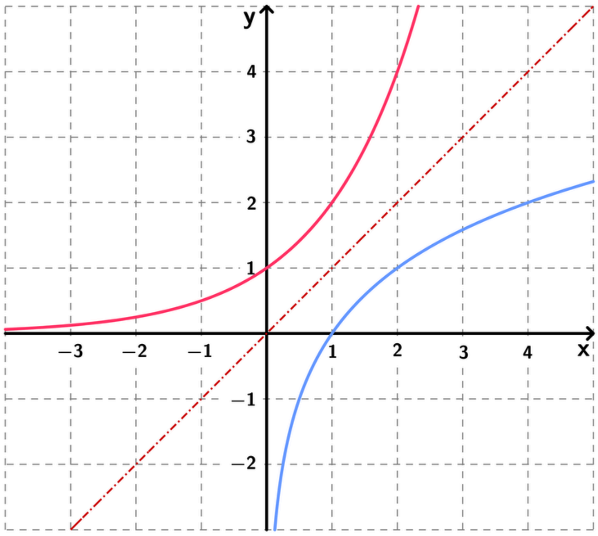
$g(x) = 2^x$



$f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$

$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

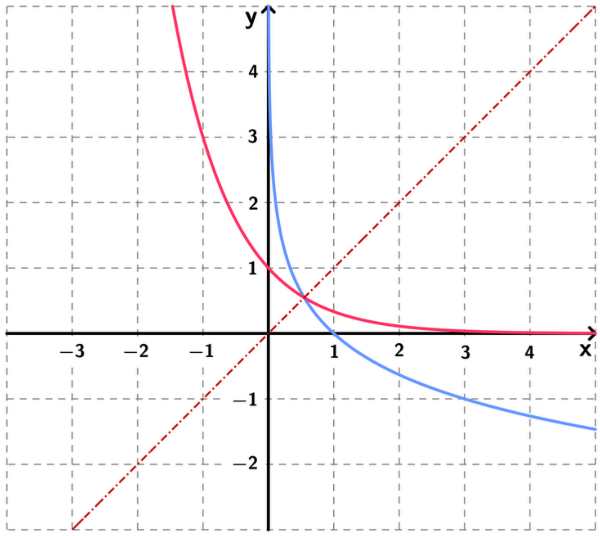
Ao observar esses gráficos é possível notar uma característica interessante: ambos apresentam uma simetria em relação à reta y=x. Observe os mesmos dois gráficos anteriores com essa reta destacada:



$f(x) = log_2 x$

$g(x) = 2^x$

$y = x$



$f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$

$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$y = x$

A relação entre as funções exponencial e logarítmica é muito útil para a resolução de problemas, que será nossa próxima seção.

Como Obter a Função Inversa da Função Logarítmica

Vamos obter a função inversa da função logarítmica $f(x) = 2 \cdot log_5 x$.

1. Reescrever a função da seguinte forma: $y = 2 \cdot log_5 x$

2. Inverter as variáveis x e y:

$$y = 2 \cdot log_5 x \to x = 2 \cdot log_5 y$$

3. Usar as propriedades do logaritmo para isolar y na última expressão:

$$x = 2 \cdot log_5 y \Leftrightarrow \frac{x}{2} = log_5 y \Leftrightarrow y = 5^{\frac{x}{2}}$$

4. A última equação representa a função inversa: $g(x) = 5^{\frac{x}{2}}$

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para tratar dos problemas envolvendo a função logarítmica devemos ficar atento a alguns detalhes:

1 **Compreender o Problema**
Leia o problema com atenção e identifique o que está sendo pedido. Identifique os valores conhecidos e desconhecidos.

2 **Manipulação Algébrica**
Dependendo do que for solicitado, pode ser necessário calcular o valor numérico da função para um determinado valor da variável independente x ou então determinar o valor da variável x, dado uma situação específica. Em ambos os casos devemos ter sempre em mente a definição do logaritmo e suas propriedades.

Vejamos a seguir algumas situações envolvendo a função logarítmica:

1 Escala Richter (Assis e Miranda, 2021 a)

Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto, na escala Richter, é:

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na escala Richter?

Note que a equação que fornece a magnitude do terremoto foi dada e sabemos qual a magnitude do terremoto em questão (M=9), devemos encontrar qual foi a energia liberada por este terremoto (E). Substituindo os valores conhecidos na expressão fornecida no problema temos

$$9 = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)$$

Usando que $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$, obtemos

$$9 = \frac{2}{3} \cdot \left(logE - log10^{4,5}\right)$$

Sabemos que $log_a a^m = m$, então

$$9 = \frac{2}{3} \cdot (logE - 4,5)$$

Manipulando a expressão, temos:

$$9 = \frac{2}{3} \cdot (logE - 4,5) \Rightarrow \frac{9 \cdot 3}{2} = logE - 4,5 \Rightarrow \frac{27}{2} + 4,5 = logE$$

$$\Rightarrow logE = 13,5 + 4,5 = 18 \Rightarrow E = 10^{18} \text{ joules}$$

❷ Juros Compostos (Assis e Miranda, 2021 a)

Um capital de 10 000 reais é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Qual a quantidade mínima de anos (inteiros) para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial?

Dados

$log2 = 0,3$

$log3 = 0,48$

O montante é dado por

$$M(t) = 10\,000 \cdot (1,08)^t.$$

Como devemos determinar o tempo mínimo para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial, devemos ter M(t) = 20 000. Substituindo tais valores na expressão acima temos

$$20\,000 = 10\,000 \cdot (1,08)^t \Rightarrow \frac{20\,000}{10\,000} = 2 = (1,08)^t$$

Como $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$, podemos aplicar o logaritmo de base 10 em ambos os membros da relação acima, obtendo

$$2 = (1,08)^t \Rightarrow log2 = log(1,08)^t \Rightarrow log2 = t \cdot log1,08$$

Como sabemos apenas os valores de log 2 e log 3 e o logaritmo das potencias de 10, devemos representar 1,08 na forma de uma fração decimal e escrever:

$$1,08 = \frac{108}{100} = \frac{27 \cdot 4}{100} = \frac{3^3 \cdot 2^2}{10^2}$$

Portanto, podemos calcular

$$log1,08 = log\left(\frac{3^3 \cdot 2^2}{10^2}\right) = log\left(3^3\right) + log\left(2^2\right) - log\left(10^2\right) = 3 \cdot log3 + 2 \cdot log2 - 2$$

$$= 3 \cdot 0,48 + 2 \cdot 0,3 - 2 = 1,44 + 0,6 - 2 = 2,04 - 2 = 0,04$$

Logo,

$$log2 = t \cdot log1,08 \Rightarrow 0,3 = t \cdot 0,04 \Rightarrow t = \frac{0,3}{0,04} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ anos}$$

Como o tempo, em anos, deve ser um número inteiro, serão necessários 8 anos para que o montante supere 20 000 reais.

Exercícios Resolvidos

Exercício 1. (adaptada de Assis e Miranda, 2021 b) Para se calcular a intensidade luminosa L, medida em Lumens, à profundidade de x centímetros num determinado lago, utiliza-se a lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula

$$log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08 \cdot x.$$

Qual a intensidade luminosa L a uma profundidade de 12,5 cm?

Solução. A expressão fornecida envolve as variáveis L e x, e é importante não confundi-las. Dados que x=12,5 cm, devemos determinar o valor de L:

$$log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08 \cdot 12,5 = -1 \Rightarrow \frac{L}{15} = 10^{-1} = 0,1 \Rightarrow L = 0,1 \cdot 15 = 1,5 \text{ Lumens.}$$

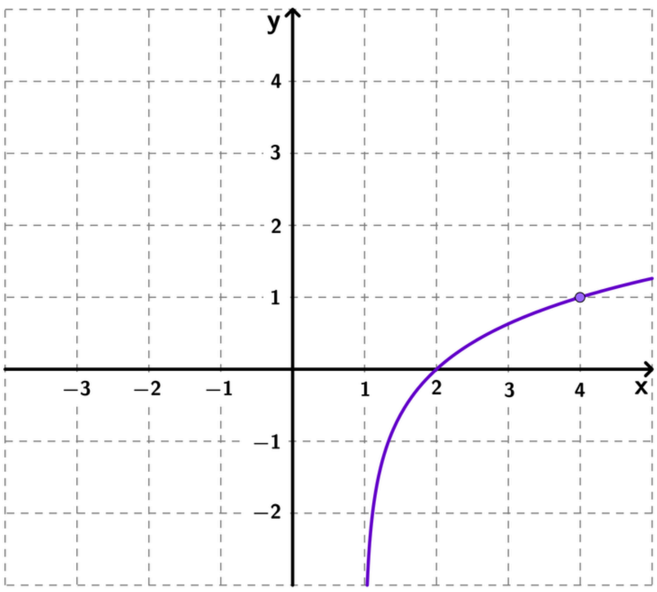
Exercício 2. O gráfico da função

$$f(x) = log_3(x+a)$$

está representado ao lado.

a) Determine a expressão de f(x).

b) Determine a função exponencial g(x) que é inversa à função f(x).



Solução.

a) Note que o ponto (4, 1) é um ponto do gráfico da função logarítmica dada. Assim:

$$log_3(4+a) = 1$$

Usando a definição do logaritmo, temos

$$log_3(4+a) = 1 \Leftrightarrow 3^1 = 4+a \Leftrightarrow 3 = 4+a \Leftrightarrow a = -1.$$

Portanto,

$$f(x) = log_3(x-1).$$

b) Para obter a inversa devemos inverter as variáveis na função dada e determinar y:

$$f(x) = log_3(x-1) \Rightarrow y = log_3(x-1) \rightarrow x = log_3(y-1)$$

$$x = log_3(y-1) \Leftrightarrow 3^x = y-1 \Leftrightarrow 3^x+1 = y.$$

Portanto, a inversa da função f dada é

$$g(x) = 3^x + 1.$$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 2 (Funções e progressões) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
- p. 84-102.
2. **Volume 2 (Função exponencial, função logarítmica e sequências) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
- p. 66-96.

PORTAL DA MATEMÁTICA

O módulo 'Função Logarítmica' do portal da matemática apresenta vídeos e materiais para o aprofundamento sobre progressão geométrica.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA NO ENEM

Para um aprofundamento nas aplicações da função logarítmica, sugerimos três questões do Enem para discussão em sala de aula. As questões e respectivas soluções podem ser acessadas por aqui ou pelo QR Code ao lado.

Atividades

ATIVIDADE 1

Em cada caso, determine o valor de x que satisfaça a equação:

A) $log_5 625 = x$

B) $log_2 x = 3$

C) $log_x 216 = 3$

D) $log_{\frac{1}{2}} x = -3$

E) $log\,(3x + 1) = 2$

ATIVIDADE 2

Dada a função logarítmica $f(x) = 3 \cdot log_5(x - 1) + 2$, determine:

A) f(6)

B) f(26)

C) f(x) = 5

D) f(x) = 8

ATIVIDADE 3

(Cesgranrio - Adaptada) As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos ocorridos no Círculo de Fogo do Pacífico foram relacionados pela fórmula:

$$R_1 - R_2 = log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Como nas medições R_1 e R_2 apresentaram valores iguais a 8 e 6, respectivamente, determine a razão entre as ondas M_1 e M_2, que medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

ATIVIDADE 4

(UFSCAR/SP - Adaptada) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, destinada à produção de madeira, evolui desde o plantio segundo o modelo matemático:

$$h(t) = 1{,}5 + log_3(t+1)$$

onde **h(t)** é a altura do tronco (em metros) e **t** o tempo (em anos). Se uma dessas árvores foi cortada após 8 anos do momento da plantação, qual era a altura (em metros) do tronco da árvore no momento do corte?

ATIVIDADE 5

Dada a função $f(x) = \log_2 x$, determine a sua função inversa g(x). Em seguida, represente graficamente, em seu caderno, ambas as funções no mesmo plano cartesiano. Quais características você observa na relação entre esses dois gráficos?

ATIVIDADE 6

Um renomado sismólogo está analisando dados de um recente tremor de terra registrado por um sismógrafo localizado em uma área de intensa atividade tectônica. A magnitude **M** de um terremoto na escala Richter é dada pela função logarítmica:

$$M = log_{10}A - log_{10}A_0$$

onde:

- **A** representa a amplitude máxima da onda sísmica registrada (em milímetros).
- **A_0** é a amplitude de uma onda sísmica padrão de referência (considerada 10^{-3} milímetros).

Em um determinado dia, o sismógrafo registrou um abalo sísmico com uma amplitude máxima de 100 milímetros. Nesse dia, a magnitude do terremoto foi de:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

ATIVIDADE 7

O pH de uma solução aquosa é definido pela função logarítmica $pH = -log_{10}[H^+]$, onde $[H^+]$ representa a concentração de íons hidrogênio em mol/L. Se uma amostra de suco de limão tem um pH de 2, qual é a concentração de íons hidrogênio nessa amostra?

A) 10^{-12} mol/L
B) 10^{-7} mol/L
C) 10^{-2} mol/L
D) 10^{2} mol/L
E) 10^{12} mol/L

ATIVIDADE 8

A função logarítmica $k(x) = log_4 x$ é a inversa de uma função exponencial **m(x)**. Qual é a expressão correta para **m(x)**?

A) $m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

B) $m(x) = 4^x$

C) $m(x) = x^4$

D) $m(x) = log_{\frac{1}{4}} x$

E) $m(x) = \log(x^4)$

ATIVIDADE 9

Considere a função logarítmica $f(x) = log_2(x-1)$. Qual das seguintes alternativas descreve corretamente o domínio, a imagem e o comportamento de crescimento dessa função?

A) Domínio: (−∞, +∞); Imagem: (0, +∞); Crescente em todo o domínio.
B) Domínio: (1, +∞); Imagem: (−∞, +∞); Decrescente em todo o domínio.
C) Domínio: (−∞, −1); Imagem: (−∞, +∞); Crescente em todo o domínio.
D) Domínio: (1, +∞); Imagem: (−∞, +∞); Crescente em todo o domínio.
E) Domínio: (−∞, 1); Imagem: (0, +∞); Decrescente em todo o domínio.

ATIVIDADE 10

Um investidor aplicou um capital inicial de R$ 1 000,00 em um fundo de investimento que rende juros compostos a uma taxa mensal de 2%. Se o montante final atingido foi de R$ 1 268,24, qual foi o tempo, aproximado, de aplicação?

A) 10 meses
B) 12 meses
C) 15 meses
D) 18 meses
E) 20 meses

Utilize:

$$\log_{10} 1{,}02 \cong 0{,}0086$$

$$\log_{10} 1{,}26824 \cong 0{,}1033$$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

ASSIS, C. MIRANDA, T. **Logaritmo como uma Função**. Portal da Matemática - OBMEP. 2021 a. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/7uivq58b9p4wo.pdf. Acesso em 21 de abril de 2025.

ASSIS, C. MIRANDA, T. **Exercício de Função Logarítmica**. Portal da Matemática - OBMEP. 2021 b. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/5ocmaoqa5y4gw.pdf. Acesso em 21 de abril de 2025.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: Funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: Função exponencial, função logarítmica e sequências. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2023 - Exame Nacional do Ensino Médio 2023:** 2º dia. Brasília: INEP, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2023_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 21 abr. 2025.

USP. **Um pouco da História dos Logaritmos**. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm. Acesso em 22 de abril de 2025.

ATIVIDADES

BONJORNO, José R.; GIOVANNI JUNIOR, José R.; SOUSA, Paulo R. C. **Prisma matemática:** conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José R.; GIOVANNI JUNIOR, José R.; SOUSA, Paulo R. C. **Prisma matemática:** funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, Luís R.; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** Função exponencial, função logarítmica e sequência. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.