GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM
EM13MAT404 Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Reconhecer situações práticas que podem ser modeladas por funções definidas por partes, como tabelas de tarifas progressivas ou descontos condicionais. • Identificar funções definidas por mais de uma sentença algébrica e compreender o conceito de domínios de validade para cada sentença. • Representar graficamente funções definidas por partes, respeitando os domínios de validade e identificando possíveis descontinuidades ou mudanças de comportamento. • Analisar o crescimento, decrescimento e pontos críticos da função, com base no gráfico. • Converter a representação algébrica defunções definidas por partes em sua forma gráfica e vice-versa.

Contextualização

Ao longo dos seus estudos, você já explorou diferentes tipos de funções: as de **1º grau**, com seu crescimento linear e previsível; as de **2º grau**, com suas parábolas ascendentes e descendentes; e até as **exponenciais**, que modelam crescimento acelerado. Mas, e se disséssemos que uma única função pode ter **diferentes comportamentos dependendo do valor de *x***?

Pense assim: imagine que o clima de uma cidade é modelado por uma função. Pela manhã, a temperatura pode aumentar gradualmente; à tarde, pode se estabilizar em um valor fixo; e à noite, pode cair seguindo outra tendência. Não podemos descrever essa variação com uma única equação – precisamos de **diferentes regras para cada período do dia**.

As **funções definidas por partes** quebram a ideia de uma única regra de formação. Agora, em vez de uma única expressão para todos os valores de *x*, podemos ter várias funções, cada uma válida em um intervalo específico. Isso significa que **um mesmo gráfico pode apresentar segmentos de retas, curvas parabólicas, ou até mesmo saltos entre diferentes valores**.

Agora que você conhece essa ideia inicial, vamos explorar sua definição formal e entender como construímos seus gráficos!

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

INTRODUÇÃO

As funções definidas por mais de uma sentença são aquelas cujas expressões algébricas variam dependendo do intervalo de valores da variável independente. Elas são amplamente utilizadas na modelagem de fenômenos que mudam de comportamento em determinados pontos.

Definição

Uma função $f(x)$ é definida por mais de uma sentença quando sua regra de formação depende do valor de x. A notação matemática utilizada é:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \text{ pertence ao intervalo } I_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \text{ pertence ao intervalo } I_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{se } x \text{ pertence ao intervalo } I_n \end{cases}$$

Em que:

- Cada $f_i(x)$ é uma expressão algébrica definida para o intervalo específico I_i.
- Cada um dos intervalos I_i pode ser aberto, fechado ou semiaberto.
- A união dos intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_n$ é o domínio da função.
- A imagem da função é a união da imagem de cada $f_i(x)$.
- O gráfico de uma função definida por partes é a reunião em um mesmo plano cartesiano do gráfico de cada uma das expressões $f_i(x)$.

VOCÊ SABIA?

Crescimento das Plantas 🌱: Algumas espécies de plantas apresentam crescimento com diferentes taxas dependendo da fase de vida. No início, o crescimento é lento, depois acelera durante a maturação e, por fim, estabiliza na fase adulta. Esse comportamento pode ser modelado por funções por partes.

Exemplo 1 - Função contínua

Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x < 1 \\ -x+4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

O seu gráfico é uma junção do gráfico das duas expressões, como podemos ver na figura 1. Perceba que ambas as expressões separadas são funções do 1º grau. Assim, a função *f* terá duas raízes, pois cada uma das expressões passa pelo eixo *x*.

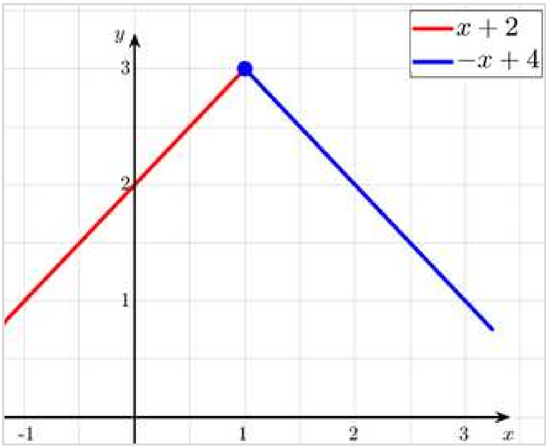


Figura 1: Gráfico da função definida por partes composta por duas semirretas, uma crescente e outra decrescente.

Exemplo 2

Agora, considere a seguinte função

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 2x+1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

O seu gráfico é uma junção do gráfico das duas expressões, como podemos ver na figura 2. Note que a primeira expressão corresponde a uma parábola e a segunda a uma reta.

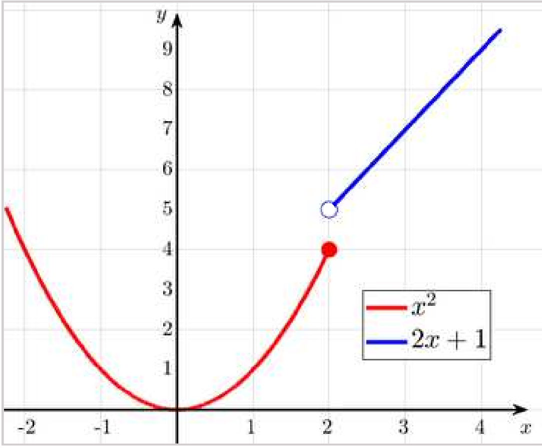


Figura 2: Gráfico de uma função definida por partes composta por uma parábola com a concavidade voltada para cima e uma função afim crescente.

Aqui, a função g(x) apresenta descontinuidade, pois o ponto com abscissa 2 pertence apenas à função $g(x) = x^2$, já que a função $g(x) = 2x + 1$ é definida apenas para valores onde x é maior que 2.

Determinação da forma algébrica a partir de um gráfico

Para encontrar a expressão de uma função definida por partes a partir do gráfico:

1. Identifique os intervalos onde a função possui comportamento linear, quadrático ou outro padrão evidente.
2. Determine a equação de cada trecho (por exemplo, se for uma reta, procure calcular o valor dos coeficientes a e b).
3. Identifique se há pontos isolados ou descontinuidades.
4. Descreva a função na forma de sentenças matemáticas, garantindo a coerência nos limites.

VOCÊ SABIA?

Elevação do Nível do Mar 🌊: O derretimento das geleiras e o aumento do nível dos oceanos não ocorrem a uma taxa constante, pois variam com as estações do ano e com a aceleração das mudanças climáticas. Modelos matemáticos que preveem esse comportamento frequentemente usam funções definidas por partes.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Determine a função por partes que descreve o gráfico abaixo

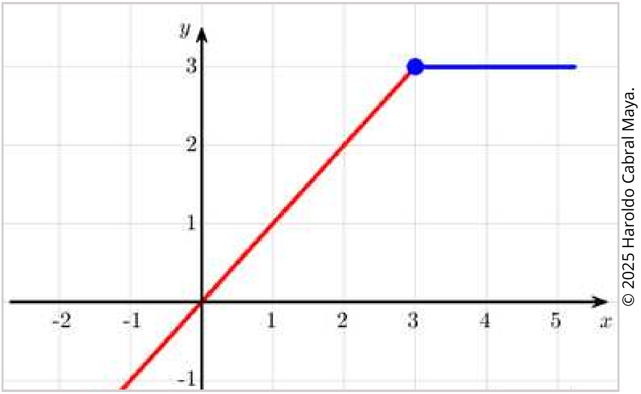


Figura 3: Gráfico de uma função definida por partes.

Resolução

Trata-se de uma função definida por partes. Para x < 3, a expressão é uma função do 1º grau da forma geral:

$$f(x) = ax + b$$

Sabemos que essa reta passa pela origem, ou seja, quando *x = 0*, temos *f(0) = 0*. Isso indica que o coeficiente linear é *b = 0*, resultando na equação:

$$f(x) = ax$$

Além disso, podemos ver no gráfico que para cada unidade de incremento em *x*, há um incremento de 1 unidade em *y*. Isso significa que a taxa de variação (coeficiente angular *a*) é igual a 1. Assim, temos:

$$f(x) = 1 \cdot x = x, \qquad \text{para } x < 3$$

Já para x ≥ 3, a função é constante e assume o valor 3.

Logo, podemos definir a função por partes mostrada no gráfico da Figura 3 como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 3 \\ 3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função afim e função quadrática. (DANTE)

Capítulo 1: função afim.

- Funções definidas por mais de uma sentença (p. 57- 67).

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 1: função definida por mais de uma sentença.

- Introdução (p. 12).
- Função definida por mais de uma sentença (p. 12 - 24).

Atividades

ATIVIDADE 1

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{se } x \geq 4 \\ x^2 - 4, & \text{se } x < 4 \end{cases}$

Com base nessa definição, responda:

a) Qual é o valor de *f(0)* =

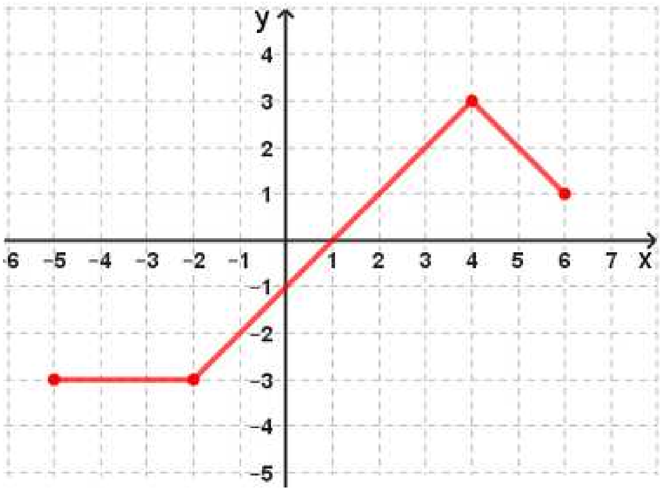
b) Qual é o valor de *f(-2)* =

c) Qual é o valor de *f(4)* =

d) Qual é o valor de $f\left(\frac{9}{2}\right) =$

ATIVIDADE 2

Observe a representação gráfica, no plano cartesiano abaixo, onde temos uma função de domínio [-5, 6].



De acordo com esse gráfico, essa função é estritamente crescente no intervalo

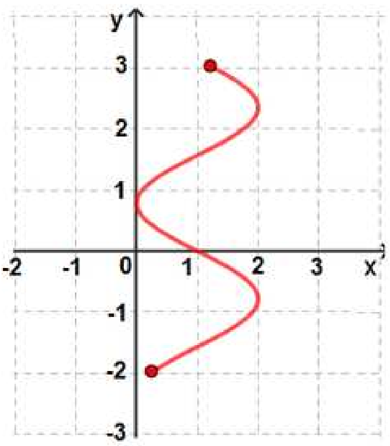
a) [4, 6]
b) [-3, 3]
c) [-3, 4]
d) [-2, 4]
e) [1, 4]

ATIVIDADE 3

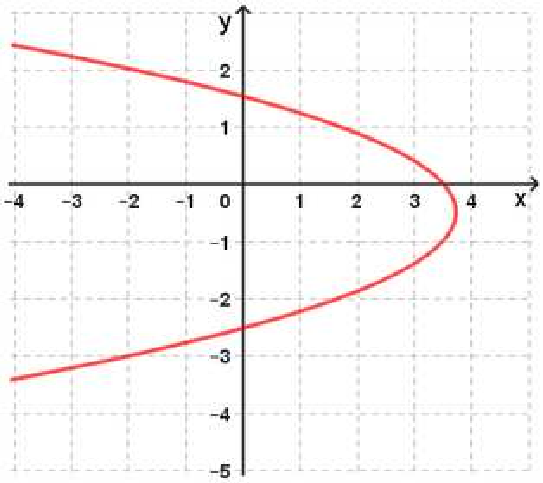
Uma função em partes é uma função que é definida por diferentes expressões matemáticas, aplicáveis em intervalos distintos do seu domínio, ou seja, a função é composta por "partes" que se aplicam a diferentes valores de *x*. No entanto, é importante lembrar que, de forma geral, uma função é uma relação entre dois conjuntos, onde, para cada valor de *x* (domínio da função), existe uma única correspondência associada a um valor *y* (imagem da função).

Considerando as informações apresentadas, observe os gráficos a seguir, representados no plano cartesiano, e indique qual deles pode representar uma função *f*, onde *y* = *f(x)* é válido para todos os valores reais de *x*.

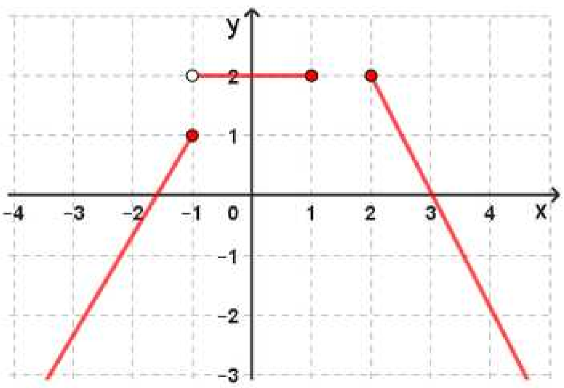
a)



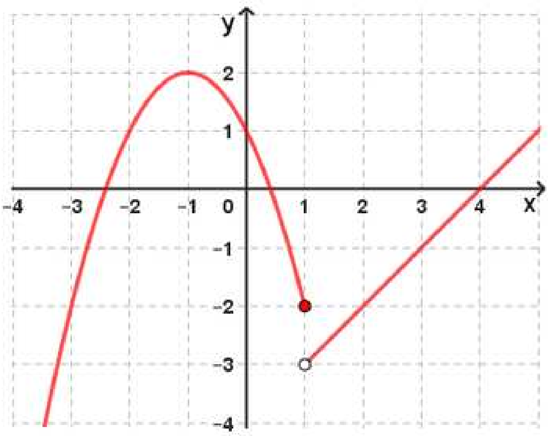
d)



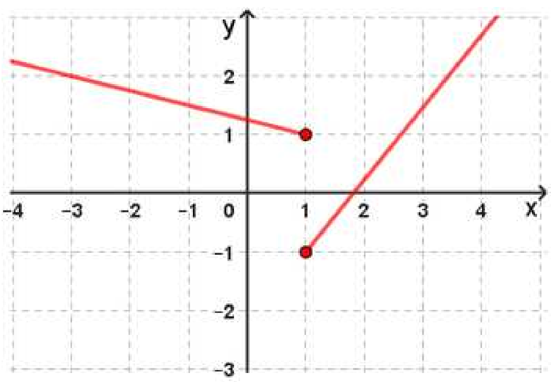
b)



e)



c)



ATIVIDADE 4

Leia as afirmações abaixo e marque se são verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) (   ) Uma função em partes é uma função que é definida por uma única expressão matemática para todo o domínio.
b) (   ) Uma função em partes pode ser definida por diferentes expressões matemáticas, cada uma válida para um intervalo distinto do domínio.
c) (   ) Em uma função em partes, a condição de pertencimento de cada intervalo é irrelevante, pois não influencia a definição da função.
d) (   ) Funções em partes são úteis apenas para modelar situações simples e lineares, não sendo aplicáveis em situações que envolvem mudanças complexas, como em problemas de Física ou Economia.

ATIVIDADE 5

Em um encarte de supermercado há um anúncio de promoção de desodorantes. Veja os valores a seguir

Design: SweeHome / Fonte: Canva

Considerando a promoção anunciada, responda:
a) Qual será o valor total pago na compra de 2 unidades de desodorante?

b) Qual será o valor total pago na compra de 5 unidades de desodorante?

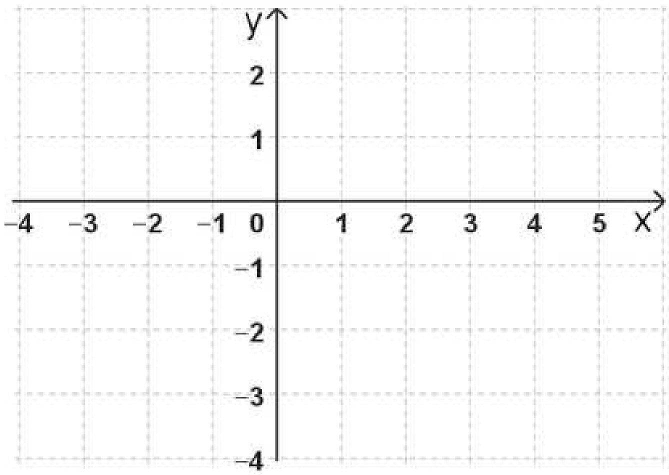
c) Seja *x* $(x \in \mathbb{R})$ o número de desodorantes comprados e *y* o valor total (em reais) gasto. Qual a lei da função que relaciona *x* e *y*?

d) Qual o desconto percentual obtido na compra, nessa promoção, de 5 unidades de desodorante?

ATIVIDADE 6

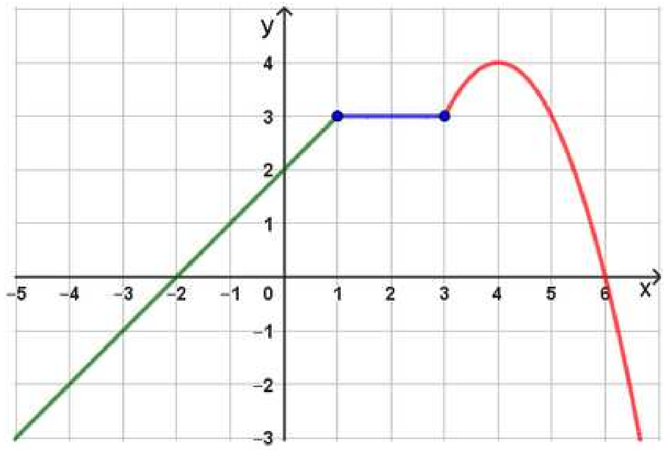
Construa, no plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{se } x \geq 1 \\ -2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

e dê o seu conjunto imagem.



ATIVIDADE 7

Observe o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \,]-\infty, 4]$, que é definida por partes.



Analisando o gráfico acima, identifique qual é a expressão da função para cada intervalo que compõe seu domínio, levando em conta o comportamento gráfico observado em cada segmento da função.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 12, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{se } x \leq 1 \\ 3, & \text{se } 1 < x < 3 \\ x^2 - 8x + 12, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 12, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

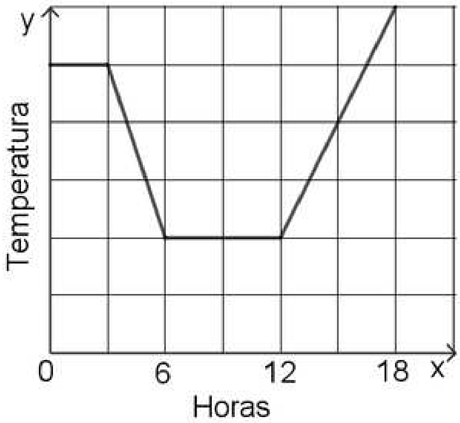
d) $f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 12, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 12, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

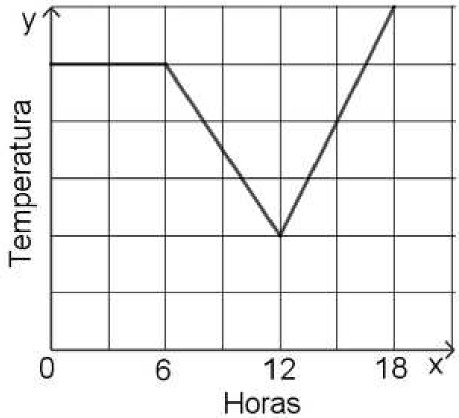
ATIVIDADE 8

(SAEPE 2018) A previsão do tempo para uma cidade brasileira foi noticiada da seguinte maneira: “Durante a madrugada a temperatura diminuiu, permanecendo constante pela manhã, mas aumentou no período da tarde”. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a situação descrita nesse texto?

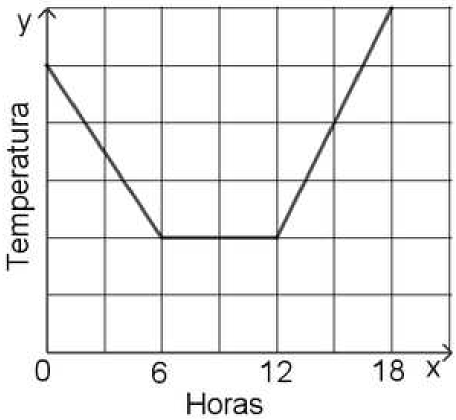
a)



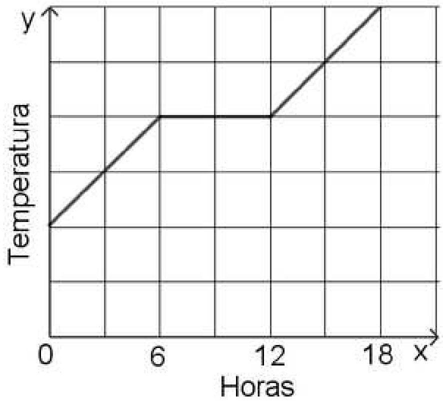
b)



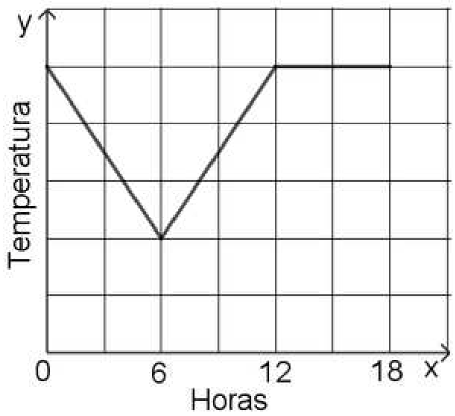
c)



d)

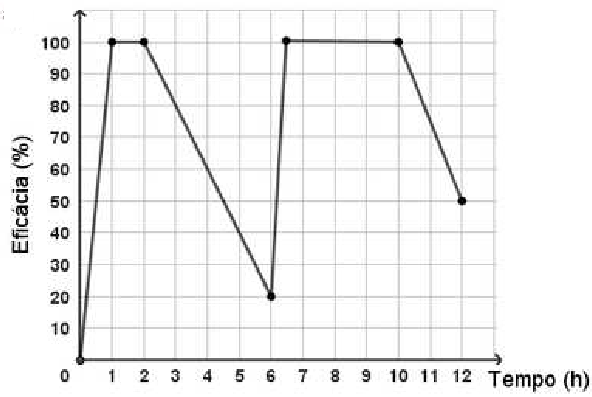


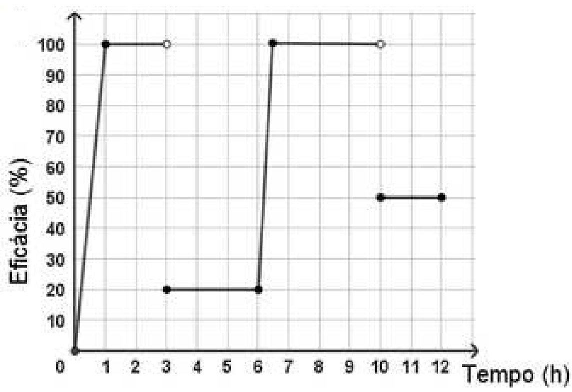
e)

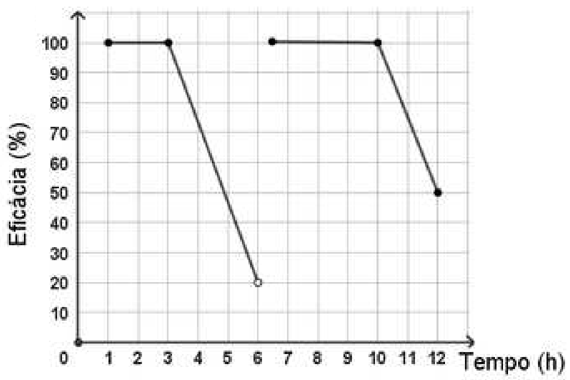


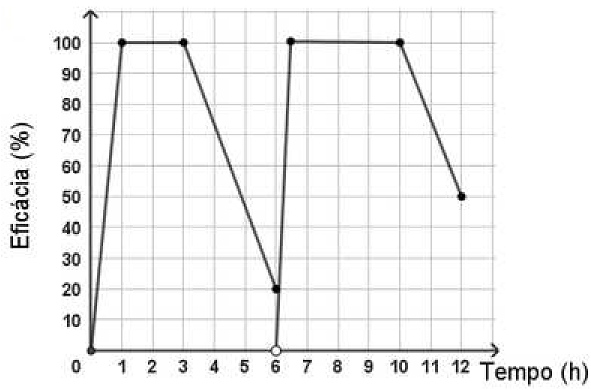
ATIVIDADE 9

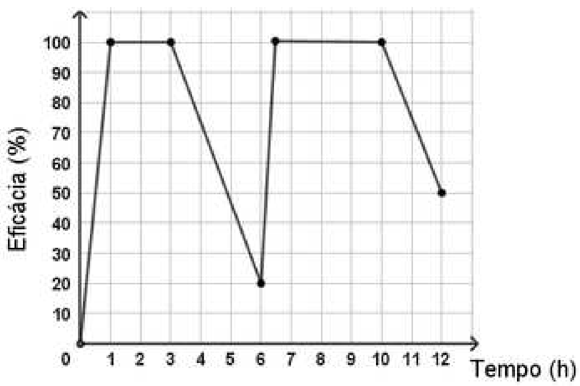
(ENEM - 2016) Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2h. Após essas 2h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5h e permanecendo em 100% por 3,5h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.
Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?

a)


d)


b)


e)


c)


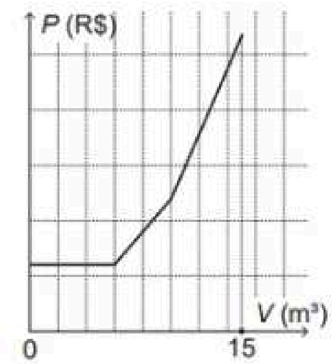
ATIVIDADE 10

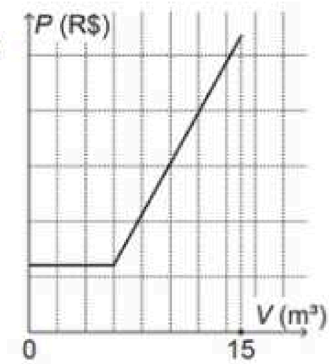
(ENEM - 2019) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

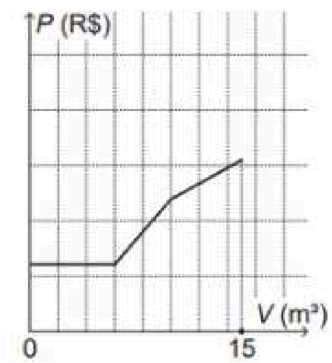
- Faixa 1: para consumo de até 6 m³, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m³ e até 10 m³, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m³;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m³, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m³.

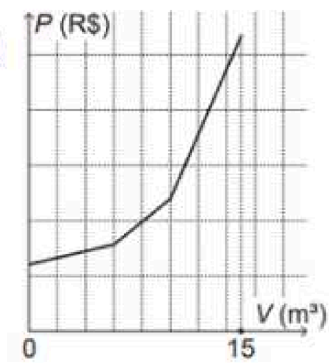
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m³ por mês.

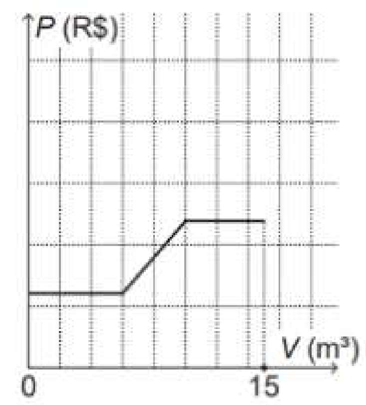
O gráfico que melhor descreve o valor *P*, em real, a ser pago por mês, em função do volume *V* de água consumido, em metro cúbico, é

a)


d)


b)


e)


c)


Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática, 1º ano: ensino médio.** São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: função afim e função quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função Afim e Função Quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 08/02/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola**. SAEPE – 2018 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2009/BOLETIM_SAEPE_VOL3_3EM_MAT_2009.pdf>. Acessado em: 08/02/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Conjuntos e função afim.** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.