

Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

PONTO DE MÁXIMO E PONTO DE MÍNIMO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRIPTOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT503 Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. EM13MAT315 Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	• Analisar pontos de máximo ou mínimo de funções quadráticas no contexto de área de superfícies, Matemática Financeira, Cinemática, entre outros. • Resolver problemas envolvendo pontos de máximo ou pontos de mínimo de funções quadráticas em diferentes contextos. • Resolver problemas envolvendo funções quadráticas. • Reconhecer o conceito de algoritmo como uma sequência ordenada e lógica de passos para resolver problemas. • Identificar os componentes básicos de um fluxograma, como início, fim, decisão, processo e entrada/saída. • Elaborar algoritmo que resolve problema envolvendo função quadrática (por exemplo, envolvendo ponto de máximo ou mínimo).	D133_M Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.

Contextualização

30/05/2019 18h20

Práticas de 'Educação Financeira' dinamizam aulas de Matemática em escola de Serra

es.gov.br

Alunos da Escola Maringa estão aprendendo sobre economia e investimentos futuros que podem fazer.

Na Escola Estadual Maringa, em Serra, os alunos vivenciaram uma forma de aprender Matemática, integrando o conteúdo da disciplina com a educação financeira. O trabalho mostrou que, ao entender como gerenciar dinheiro, os estudantes não só se aproximaram da Matemática, mas também começaram a enxergar a importância dos conceitos matemáticos para a construção de um futuro financeiro mais seguro. O professor Carlos Costa destacou que, ao aplicar temas do cotidiano, como o planejamento financeiro, as aulas de Matemática se tornaram mais atraentes e significativas para os alunos, pois muitos não tinham noção de como os conceitos matemáticos estavam presentes em situações da vida real.

A utilização da função quadrática no contexto de educação financeira é um exemplo claro de como a Matemática pode ser aplicada de forma prática e útil. **Funções quadráticas**, são essenciais para entender fenômenos financeiros que envolvem despesas e investimentos que seguem uma trajetória com **crescimento ou decrescimento**, como o cálculo de valor de ativos ao longo do tempo ou a análise de despesas mensais que crescem de forma acelerada. Por exemplo, a função quadrática pode ser utilizada para modelar o custo de manutenção de um equipamento ou a depreciação de um bem com o passar dos anos, onde o valor do bem diminui de forma não linear.

Assim, os alunos não apenas aprendem a resolver problemas matemáticos, mas também podem aplicar esse conhecimento para analisar e projetar cenários financeiros práticos. Esse tipo de aprendizado vai além da teoria, permitindo que os estudantes usem a Matemática para modelar e planejar suas finanças de maneira concreta.

Neste material, iremos aprofundar o estudo das funções quadráticas em contextos variados.

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

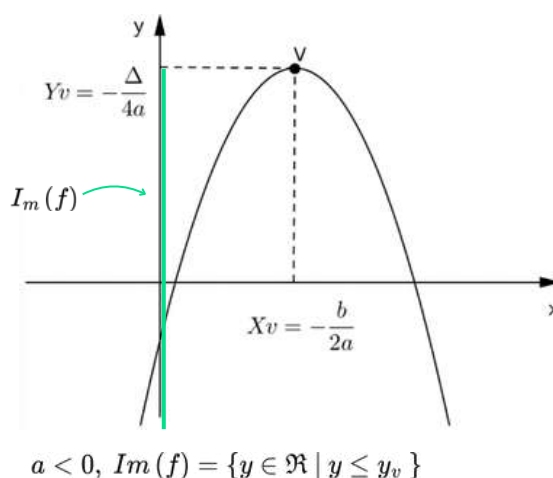
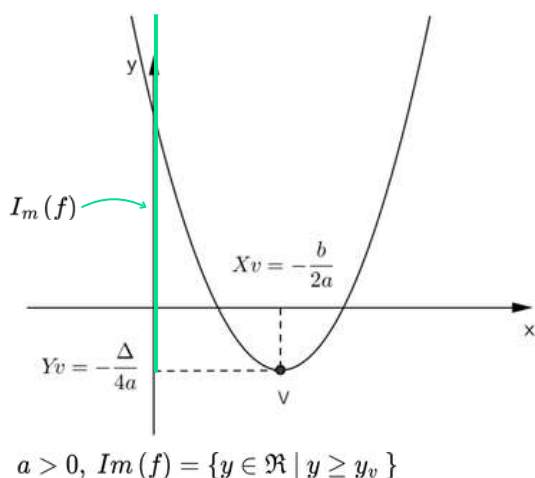
IMAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

A **imagem** de uma função quadrática é o conjunto de todos os valores de $f(x)$ que a função pode assumir. Em outras palavras, é o conjunto de valores y para os quais existe um valor x que satisfaz a equação da função quadrática.

Utilizando as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática f , podemos determinar o seu conjunto imagem (Im).

No material anterior vimos que:

- $a > 0$, o vértice V é o **ponto de mínimo** da função e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo** que a função assume, ou seja, é o menor valor de imagem da função.
- $a < 0$, o vértice V é o **ponto de máximo** da função e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor máximo** que a função assume, ou seja, é o maior valor de imagem da função.



Veja o exemplo:

Determine a $Im(f)$ e o valor máximo ou mínimo da função quadrática $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2))}{4 \cdot 1} = -\frac{16 + 8}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

$a > 0$, então a concavidade é para cima e a curva é limitada inferiormente, portanto a função tem valor mínimo. Assim a imagem é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -6\}$$

Valor mínimo de f é -6.

Outra forma: Para determinar o y_v a partir do x_v , basta substituir o valor do x_v no lugar do x da função e efetuar os cálculos necessários.

ALGORITMO PARA ENCONTRAR PONTO DE MÁXIMO OU MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

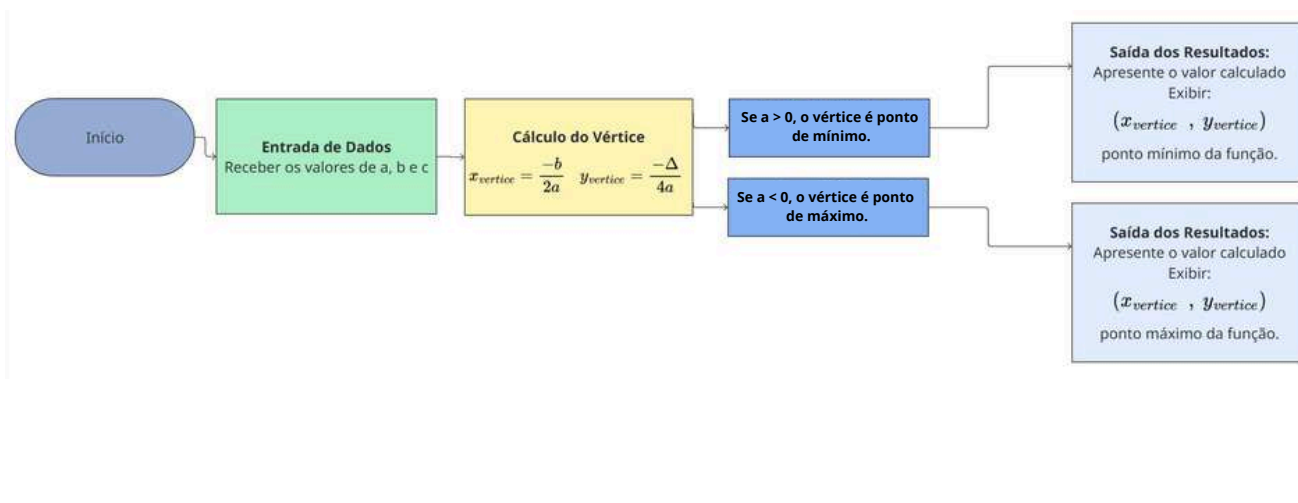
ELEMENTOS BÁSICOS DE UM ALGORITMO

Um algoritmo é uma sequência de passos lógicos e bem definidos que têm como objetivo resolver um problema. Podemos dividi-lo nos seguintes elementos:

- **Entrada:** São os dados ou informações que o algoritmo precisa para funcionar. O algoritmo recebe os coeficientes **a**, **b**, e **c** da função quadrática.
- **Processamento:** O processamento envolve os cálculos ou operações que o algoritmo realiza para chegar à solução. O valor de x_{vertice} é calculado pela fórmula $\frac{-b}{2a}$ e o valor do y_{vertice} é calculado pela fórmula $\frac{-\Delta}{4a}$.
- **Decisões Condicionais:** São as etapas em que o algoritmo escolhe entre diferentes caminhos, dependendo de uma condição. O algoritmo verifica se **a** é positivo ou negativo para identificar se o **vértice** é um **ponto de máximo ou mínimo**.
- **Saída:** O algoritmo exibe o valor de x_{vertice} , o valor de y_{vertice} , e a informação sobre se o ponto é um máximo ou mínimo.

FLUXOGRAMA PARA ENCONTRAR O PONTO DE MÁXIMO E MÍNIMO

No material da quinzena 7 na página 6 estudamos sobre o que é um fluxograma, agora iremos construir um fluxograma que represente o algoritmo para encontrar o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática. Ele terá as seguintes etapas:



Exercícios Resolvidos



Este exercício tem como objetivo desenvolver a expectativa de aprendizagem: analisar pontos de máximo ou mínimo de funções quadráticas no contexto de área de superfícies, Matemática Financeira, Cinemática, entre outros.

EXERCÍCIO 1

(IFBA) Durante as competições olímpicas, um jogador de basquete lançou a bola para o alto em direção à cesta. A trajetória descrita pela bola pode ser representada por uma curva chamada parábola, que pode ser representada pela expressão:

$h = -2x^2 + 8x$ (onde “h” é a altura da bola e “x” é a distância percorrida pela bola, ambas em metros). A partir dessas informações, encontre o valor da altura máxima alcançada pela bola:

- a) 4 m.
- b) 6 m.
- c) 8 m.
- d) 10 m.
- e) 12 m.

RESOLUÇÃO

Para encontrar a altura máxima alcançada pela bola, precisamos determinar o vértice da parábola representada pela equação $h = -2x^2 + 8x$.

A altura máxima ocorre no ponto onde a coordenada h é máxima. A fórmula geral para a altura de uma parábola quadrática $h = ax^2 + bx + c$, onde a , b , e c são constantes, atinge seu máximo (ou mínimo) no vértice da parábola, dado por $x = -\frac{b}{2a}$.

No caso da nossa equação:

- $a = -2$
- $b = 8$
- $c = 0$

Calculamos x usando a fórmula do vértice:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = \frac{8}{4} = 2$$

Agora, substituímos $x=2$ de volta na equação para encontrar h :

$$h = -2 \cdot (2)^2 + 8 \cdot 2$$

$$h = -2 \cdot 4 + 16$$

$$h = -8 + 16$$

$$h = 8$$

Portanto, a altura máxima alcançada pela bola é 8 metros, alternativa C.

EXERCÍCIO 2

Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.

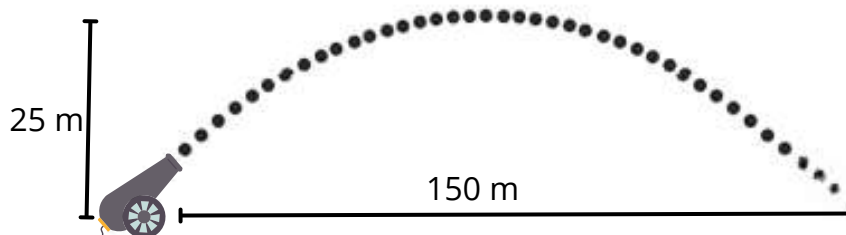


Imagem produzida no Canva

Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(0, 0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(150, 0)$ do plano xy . A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é :

- A) $y = 150x - x^2$
- B) $y = 3750x - 25x^2$
- C) $75y = 300x - 2x^2$
- D) $125y = 450x - 3x^2$
- E) $225y = 150x - x^2$

RESOLUÇÃO

Sendo a equação no formato $y = ax^2 + bx + c$ e a parábola corta o eixo na origem, então $c = 0$. Então temos a equação $y = ax^2 + bx$

Também sabemos que temos o ponto $(150, 0)$ que satisfaz a equação, então, substituindo os valores de x e y na equação, temos: $150^2 a + 150b = 0$.

Pela figura vemos que $y_{\text{vértice}} = 25$

x_v é o ponto exatamente no meio das duas raízes, $x_v = 75$. O par ordenado do vértice é $(75, 25)$, podemos substituir na equação e formar um sistema de equações:

$$75^2 a + 75b = 25$$

$$150^2 a + 150b = 0$$

Isolando na b segunda equação temos

$$b = -\frac{150^2 a}{150}$$

$$b = -150a$$

Substituindo na primeira equação

$$75 \cdot 75a + 75 \cdot (-150a) = 25$$

$$75 \cdot (75a - 150a) = 25$$

$$-75 \cdot 75a = 25$$

$$a = -\frac{25}{75 \cdot 75}$$

$$a = -\frac{1}{225}$$

Substituindo a na equação onde isolamos b

$$b = \frac{150}{225}$$

$$y = -\frac{x^2}{225} + \frac{150x}{225}$$

Se multiplicarmos a equação toda por 225, temos

$$225y = -x^2 + 150x$$

Resposta: Alternativa E.

Material Extra



LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS - FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICAS

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 123 e 124.



LIVRO MATEMÁTICA PRISMA - CONJUNTOS E FUNÇÕES

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 128 e 129.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.



Função Quadrática



Fluxograma e Algoritmos



Atividades

ATIVIDADE 1

Determine o vértice da parábola e o valor máximo ou mínimo da função cuja lei está indicada em $y = x^2 + 4x - 2$.

ATIVIDADE 2

(PAEBES TRI) Em uma Olimpíada, a trajetória do centro de gravidade de um atleta durante um salto em distância descreveu um arco de parábola. A função que representa a altura em função do tempo descrito pelo ponto P (centro de gravidade do atleta) é $h(t) = -20t^2 + 100t$, em que h representa a altura do ponto P, em centímetros, e t indica o tempo em segundos.

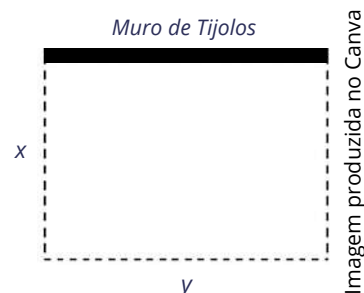
A altura máxima, em centímetros, alcançada pelo ponto P foi de

- A) 125
- B) 100
- C) 10
- D) 5
- E) 2,5

ATIVIDADE 3

Um **muro de tijolos** será usado como um dos lados de um **terreno retangular**. Para os outros lados iremos usar **400 m de tela** de arame, de modo a produzir uma área máxima. Essa **área máxima** é:

- A) 10 000 m²
- B) 20 000 m²
- C) 30 000 m²
- D) 40 000 m²
- E) 50 000 m²



ATIVIDADE 4

O vazamento ocorrido em função de uma rachadura na estrutura de uma barragem precisa ser estancado. Para consertá-la, os técnicos verificaram que o lago dessa barragem precisa ser esvaziado e estimaram que a **capacidade C** de água no lago, em milhões de metros cúbicos, poderia ser calculada por $C(t) = -2t^2 - 12t + 110$, onde **t é o tempo** em horas a partir do momento da constatação do vazamento ($t \geq 0$). Com base no texto, analise cada afirmação e julgue **VERDADEIRA** ou **FALSA**.

- A) A quantidade de água restante no lago, 4 horas após a constatação do vazamento, é de 30 milhões de metros cúbicos.
- B) A capacidade desse lago no momento da constatação do vazamento ($t = 0$), é de 110 milhões de metros cúbicos.
- C) Os técnicos só poderão iniciar o conserto da rachadura quando o lago estiver vazio, isto é, 5 horas após a constatação do vazamento.
- D) Três horas após a constatação do vazamento, o lago estará com 50% de sua capacidade inicial.

ATIVIDADE 5

Numa operação de salvamento marítimo, foi lançado um foguete sinalizador que permaneceu aceso durante **toda sua trajetória**. Considere que a **altura h**, em metros, alcançada por este foguete, em relação ao nível do mar, é descrita por $h = 10 + 5t - t^2$, em que **t é o tempo**, em segundos, após seu lançamento. A luz emitida pelo foguete é útil apenas a partir de **14 m acima do nível do mar**. O intervalo de tempo, em segundos, no qual o foguete emite **luz útil** é igual a:

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6
- E) 7

ATIVIDADE 6

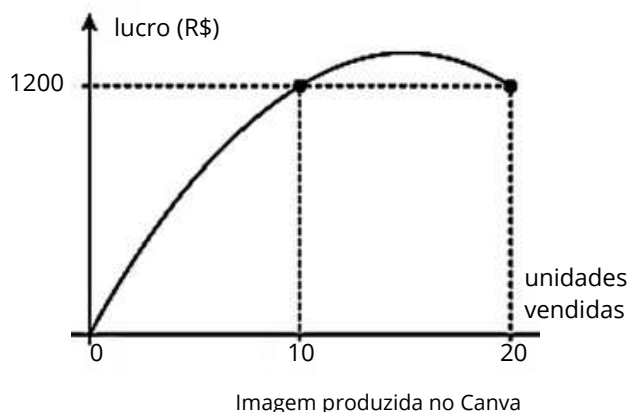
O **gráfico** de uma função quadrática $y = f(x)$ passa pela **origem** do plano cartesiano e pelo **ponto (10, 0)**. Se o **vértice** dessa parábola fica no **ponto (5, 5)** então a **lei** dessa função é

- A) $y = 0,2x^2 + 5x$
- B) $y = -0,2x^2 - 5x$
- C) $y = 5x^2 + 0,2x$
- D) $y = -0,2x^2 + 2x$
- E) $y = 0,2x^2 + 2x$

ATIVIDADE 7

O **lucro** de uma pequena empresa é dado por uma **função quadrática** cujo gráfico está representado na figura abaixo. Podemos concluir que o **lucro máximo** dessa empresa é de:

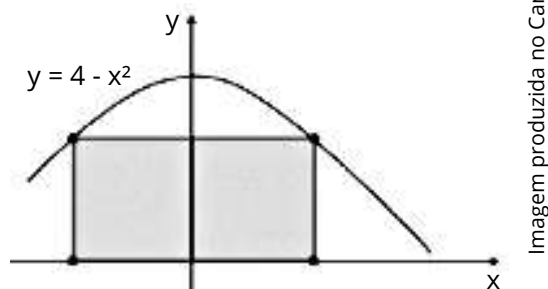
- A) R\$1.280,00
- B) R\$1.400,00
- C) R\$1.350,00
- D) R\$1.320,00
- E) R\$1.410,00



ATIVIDADE 8

Um **retângulo** no plano cartesiano possui dois vértices sobre o eixo das abscissas (eixo x) e outros dois vértices sobre a **parábola** de equação $y = 4 - x^2$, com $y > 0$. Qual é o **perímetro máximo** desse retângulo?

- A) 10
- B) 12
- C) 14
- D) 16
- E) 18



ATIVIDADE 9

No verão deste ano, foi praticado um torneio de futevôlei na praia de Itaipava, no município de Itapemirim, litoral sul do Espírito Santo. A quadra é bem parecida com a quadra de vôlei de praia. As medidas da quadra eram 9 m de largura e 18 m de comprimento, e ela é dividida ao meio por uma rede de 2,20 m de altura.

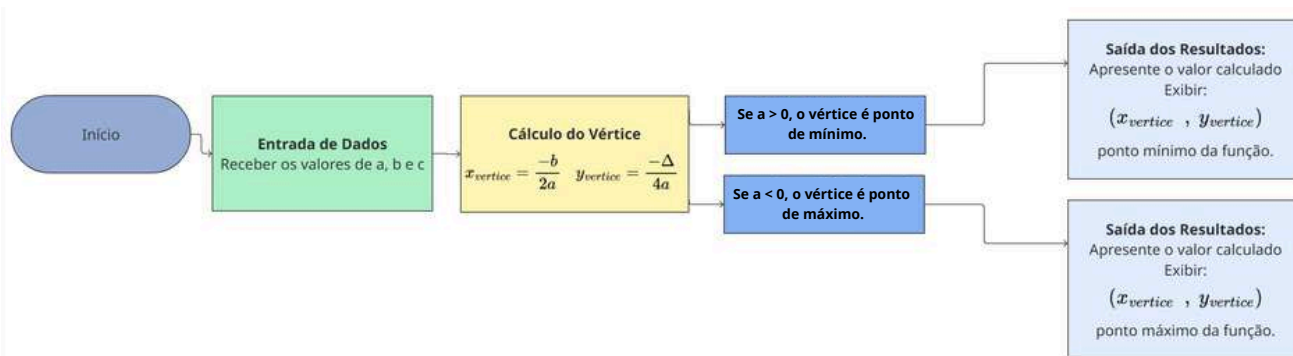
Os jogadores costumam usar uma fita colorida para demarcar a quadra.

- a) Conforme as medidas da quadra, que comprimento mínimo a fita colorida deve ter para demarcá-la?
- b) Nessas condições, qual é a área do retângulo limitado pela fita colorida?
- c) É possível conseguir, com o mesmo comprimento da fita, um retângulo de área maior? Se sim, quais serão as medidas dos lados desse retângulo?

ATIVIDADE 10

Os estudantes de uma escola irão fretar um ônibus com **45 lugares** para um passeio ao jardim zoológico. Cada um deles deverá pagar **R\$30,00**, mais **R\$3,00** para cada lugar vago.

- A) Se nesse passeio forem **20** estudantes, quanto **pagará cada um** deles?
- B) A empresa que fretou o ônibus **receberá quanto** se a quantidade de estudantes que forem a esse passeio for **30**?
- C) Qual é a **lei que expressa** o valor **V** recebido pela empresa que vai fretar esse ônibus **em função** do número **n** de estudantes que irão nesse passeio?
- D) Use o **fluxograma** a seguir para encontrar o **valor máximo** que, a empresa que irá fretar o ônibus para esse passeio, irá receber.



Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

KHAN ACADEMY. Função quadrática. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-quadratica/x34e9dd8107ca5eda:untitled-705/e/funcao-quadratica>. Acesso em: 23 mar. 2025.

ACADEMIA KHANACADEMIA KHAN. Algoritmos . Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/1-serie-em-mat-sp/x82b03a9b6c8af113:untitled-579/x82b03>



Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRIPTOR(ES)
EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	- Identificar as formas gerais das funções polinomiais do 1º grau e do 2º grau. - Reconhecer as diferenças no comportamento gráfico entre funções afins (reta) e quadráticas (parábola). - Analisar dados de problemas contextualizados e selecionar a função polinomial mais adequada (1º ou 2º grau) para representar a relação entre as variáveis envolvidas. - Aplicar os modelos construídos com função polinomial do 1º grau ou do 2º grau para resolver problemas em diferentes contextos.	D078_M Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico. D086_M Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. D132_M Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau D133_M Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.

Contextualização

HISTÓRIA DAS FUNÇÕES

No início do estudo das funções, matemáticos renomados como o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) estavam focados em explorar funções além da função afim. Ambos concentraram seus esforços em desenvolver funções que envolviam variáveis mais complexas e que estavam mais relacionadas ao estudo do cálculo e das mudanças nas grandezas físicas. Nesse contexto, a função afim, que descreve relações lineares e constantes entre as variáveis, foi deixada em segundo plano, enquanto os matemáticos se dedicavam a estudar funções com comportamentos mais elaborados, como as funções quadráticas e outros tipos mais avançados.

Foi apenas no século XX, particularmente nas décadas de 1960 e 1970, que a função afim recebeu maior atenção. Esse novo interesse surgiu de um grupo de matemáticos, a maioria franceses, que já desde 1934, se dedicavam ao estudo das funções de forma coletiva. Esse grupo, formado por matemáticos da Universidade de Estrasburgo, decidiu que o trabalho seria realizado de maneira colaborativa, sem menção a autores individuais. Para assinar os livros, trabalhos e teses publicadas, foi criado um pseudônimo coletivo: Nicolas Bourbaki.



Foto, tirada em um congresso em setembro de 1938, estão alguns matemáticos que constituíram a fase inicial do grupo Bourbaki.

Autor desconhecido -
<http://www.neverendingbooks.org/bourbaki-and-the-miracle-of-silence>

A partir dessa colaboração, as funções afim e quadrática começaram a ser revisadas e reinterpretadas, adquirindo uma nova perspectiva no campo da Matemática. A função afim, por sua simplicidade e aplicabilidade, passou a ser reconhecida como uma base sólida para o entendimento de relações lineares. Já a função quadrática, com seu comportamento não-linear, continuou a desempenhar um papel importante no estudo de fenômenos como o movimento de projéteis e a otimização de sistemas em várias áreas.

Esse desenvolvimento histórico nos permite ver como o estudo das funções evoluiu, ganhando cada vez mais relevância e se tornando fundamental não só na Matemática, mas em diversas outras áreas do conhecimento. Neste material, vamos explorar mais a fundo como as funções afim e quadrática são utilizadas para resolver problemas práticos e como elas ajudam a descrever e entender o mundo ao nosso redor.

Conceitos e Conteúdos

CONSTRUINDO MODELOS COM FUNÇÕES DO 1º E 2º GRAU PARA RESOLVER PROBLEMAS EM DIVERSOS CONTEXTOS

Quando falamos em construir **modelos matemáticos**, estamos nos referindo à capacidade de representar uma **situação do mundo real por meio de uma equação matemática**. As funções de 1º e 2º grau são frequentemente usadas para descrever relações lineares ou não lineares entre variáveis e podem ser aplicadas em contextos diversos, como prever comportamentos econômicos, analisar trajetórias de objetos em movimento, ou até mesmo modelar o crescimento de populações. Agora iremos ver alguns exemplos em diversas áreas e situações que podem ser modeladas matematicamente, por funções afim ou quadráticas.

Exemplo 1: Função Afim em Problemas de Economia

Cálculo do Custo de Produção

Imagine uma fábrica que produz camisetas e tem um custo fixo de R\$ 2.000,00 por mês, independentemente do número de camisetas produzidas. Além disso, o custo variável por unidade produzida é de R\$10,00. A relação entre o custo total de produção $C(x)$ e a quantidade de camisetas produzidas x pode ser modelada por uma função afim.

A equação para o custo total de produção seria uma função afim

$$C(x) = 10 \cdot x + 2000$$

Onde:

- $C(x)$ é o custo total de produção (em reais),
- x é o número de camisetas produzidas,
- O custo fixo é R\$ 2.000,00 (valor de b),
- O custo variável por unidade é R\$ 10,00 (coeficiente a).

Exemplos de cálculos:

Se a fábrica produzir 500 camisetas, o custo total será:

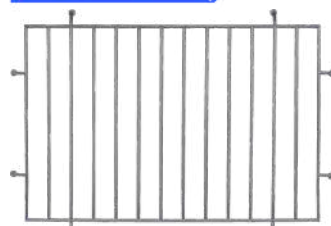
$$\begin{aligned}C(x) &= 10 \cdot x + 2000 \\C(500) &= 10 \cdot 500 + 2000 \\C(500) &= 5000 + 2000 \\C(500) &= 7000\end{aligned}$$

Portanto, o custo total de produzir 500 camisetas será R\$ 7.000,00.

Esse **modelo** ajuda a prever o custo de produção com base na quantidade de produtos fabricados.

Exemplo 2: Função Quadrática em Problemas de Economia

Uma empresa que fabrica telas de proteção para janelas precisa calcular a quantidade de material necessário para produzir telas de um tamanho específico.



Design: Nuwat Photo's Images
Fonte: Canva

Situação:

A empresa fabrica telas para janelas retangulares. Em um pedido de tela, percebeu-se que a largura da janela está relacionada à altura de uma maneira específica: a largura da janela é o triplo da altura, subtraído de 0,5 m. Para produzir a tela que cobrirá toda a janela, a empresa precisa calcular as dimensões exatas da janela, ou seja, a altura e a largura, para que o material seja comprado de forma eficiente, evitando desperdícios.

Objetivos:

- Sabendo que a medida da altura da janela é representada por x , escreva a expressão que indica a largura da janela em função de x .
- Escreva a fórmula que representa a área da janela em função de x .
- Use as informações anteriores para escrever uma equação que permita calcular o valor de x (medida de altura da janela) quando a área da janela é de $3,12 \text{ m}^2$.

Respostas:

a) Sabemos que a largura da janela é o triplo da altura, subtraído de 0,5 m. Assim, se a altura da janela é representada por x e a largura por L , a expressão para a largura será:

$$L(x) = 3x - 0,5$$

b) A área de um retângulo é dada pela fórmula: $A = \text{largura} \times \text{altura}$

Substituindo a expressão da largura (em função de x) e a altura (também em função de x), temos:

$$A(x) = (3x - 0,5) \cdot x$$

$$A(x) = 3x^2 - 0,5x$$

Modelo matemático para calcular a área dessa janela em função da altura. É uma função quadrática.

c) Podemos escrever a equação a partir da função obtida no item anterior. Para isso, substituiremos o valor de $A(x)$ por $3,12 \text{ m}^2$:

$$A(x) = (3x - 0,5) \cdot x$$

$$3,12 = 3x^2 - 0,5x$$

$$0 = 3x^2 - 0,5x - 3,12$$

Esta é a equação quadrática que permite o cálculo da altura quando a área é $3,12 \text{ m}^2$.

Com uma lata de tinta de 12 L é possível pintar uma demão de uma área de aproximadamente 80 m². Agora, imagine que se queira passar duas demãos de tinta em uma parede retangular, e sabe-se que a largura da parede é 4 vezes a medida de comprimento da altura da parede.



Pintores, ao comprarem tintas para pintar paredes, geralmente estimam a quantidade necessária de tinta de acordo com a medida de área das regiões que serão pintadas.

Design: Getty Images Pro / Fonte: Canva

- Sabendo que a medida de comprimento da altura da parede é x , qual é a medida de comprimento da largura?
- Escreva a lei da função que indica a medida de área da parede.
- Qual é a medida de área total a ser pintada considerando as duas demãos de tinta?

Respostas:

- Sabemos que a largura (L) da parede é 4 vezes a altura. Assim, se a altura da parede for representada por x , a expressão para a largura será:

$$L(x) = 4x$$

Modelo matemático para calcular a largura da parede em função da sua altura. É uma função afim.

- A área de um retângulo é dada pela fórmula:

$$A = \text{largura} \times \text{altura}$$

Substituindo as expressões para largura e altura:

$$A(x) = 4x \cdot x = 4x^2$$

Portanto, a função que representa a área da parede é:

$$A(x) = 4x^2$$

Modelo matemático para calcular a área da parede. É uma função quadrática.

- Sabemos que uma demão de tinta cobre a área da parede uma vez. Como queremos pintar duas demãos, precisamos dobrar a área calculada.

$$\text{Área total} = 2 \cdot A(x)$$

$$\text{Área total} = 2 \cdot 4x^2$$

$$\text{Área total} = 8x^2$$

Modelo matemático para calcular a área total com duas demãos de tinta. É uma função quadrática.

DIFERENÇAS NO COMPORTAMENTO GRÁFICO ENTRE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

As funções afins e quadráticas são dois tipos de funções polinomiais que apresentam comportamentos gráficos bem distintos. Enquanto as **funções afins** geram gráficos do tipo **reta**, as **funções quadráticas** geram gráficos do tipo **parábola**. Vamos entender as principais diferenças entre elas, que são essenciais para a construção de modelos matemáticos e para a interpretação gráfica de dados.

FUNÇÃO AFIM (FUNÇÃO DO 1º GRAU)

Características principais:

Uma função afim tem a forma geral:

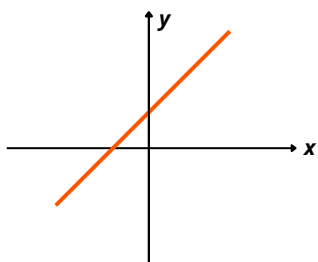
$$f(x) = ax + b \quad \text{ou} \quad y = ax + b$$

Onde:

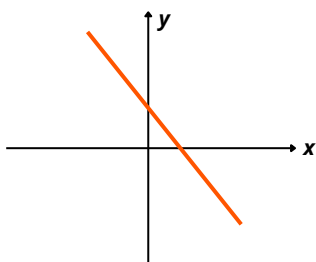
- a é o coeficiente angular (inclinação da reta);
- b é o coeficiente linear (interceptação com o eixo y).

O **gráfico** de uma função afim é sempre uma **reta**.

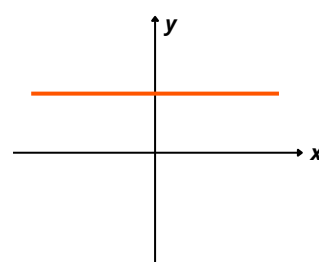
Dependendo do valor de a , a reta pode ter diferentes inclinações:



Se $a > 0$, a função é crescente (quanto maior o valor de x , maior o valor de $f(x) = y$).

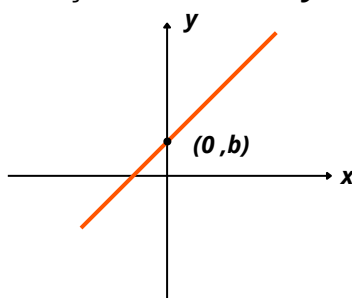


Se $a < 0$, a função é decrescente (quanto maior o valor de x , menor o valor de $f(x) = y$).



Se $a = 0$, a função é constante (para qualquer valor de x , o valor de $f(x) = y$ será o mesmo).

- O gráfico é uma linha reta.
- Não existe curvatura; o comportamento é sempre linear.
- A ordenada do ponto de interseção com o **eixo y** é dada por **$y = b$** , ou seja, a reta passa pelo ponto $(0, b)$.



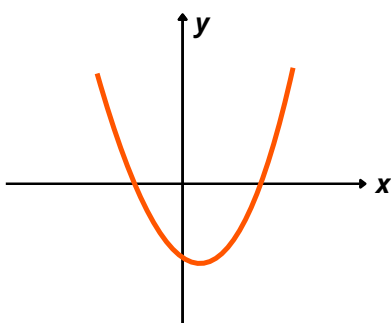
FUNÇÃO QUADRÁTICA (FUNÇÃO DO 2º GRAU)

Uma função quadrática tem a forma geral:

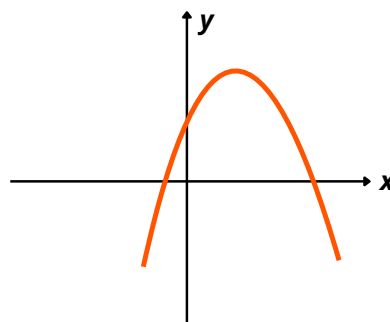
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde:

- a , b , e c são coeficientes constantes.
- O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. A concavidade da parábola depende do valor de a :



Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.

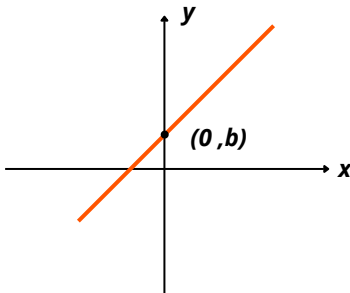
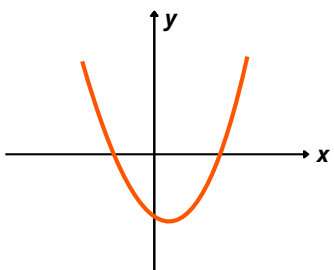


Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

- Se $a = 0$, a função se torna uma função afim, e o gráfico é uma reta.
- O gráfico de uma função quadrática é uma curva, chamada de parábola.
- A parábola pode ter um ponto de mínimo ou máximo, dependendo do valor de a .
- A ordenada do ponto de interseção com o **eixo y** é dada por **$y = c$** , ou seja, a parábola passa pelo ponto **$(0, c)$** .
- A parábola tem um vértice, que é o ponto mais baixo (se $a > 0$) ou mais alto (se $a < 0$) da curva.



COMPARAÇÃO GRÁFICA ENTRE AS FUNÇÕES

	FUNÇÃO AFIM $f(x) = ax + b$	FUNÇÃO QUADRÁTICA $f(x) = ax^2 + bx + c$
FORMA	O gráfico de uma função afim é uma linha reta. 	O gráfico de uma função quadrática é uma curva em forma de parábola. 
COMPORTAMENTO	O comportamento é linear, ou seja, a mudança em y é constante para qualquer mudança em x.	O comportamento é não linear, com a taxa de variação de y mudando conforme o valor de x aumenta ou diminui. Isso significa que a taxa de crescimento ou diminuição não é constante.
VARIAÇÃO	Na função afim, a inclinação da reta (definida por a) é constante em todo o gráfico.	Na função quadrática, a taxa de variação de y depende de x e muda ao longo do gráfico.
INTERSEÇÕES COM OS EIXOS	O gráfico de uma função afim sempre intercepta o eixo y em um ponto de coordenadas (0, b). Quando a for diferente de zero, a reta intercepta o eixo x.	O gráfico de uma função quadrática intercepta o eixo y em um ponto de coordenadas (0, c). A quantidade de interseções da parábola com o eixo x varia de acordo com o valor de delta. Podem ser dois pontos de interseção, um ponto ou nenhum ponto.



Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h , em metro, varia em função do tempo t , em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = -5t^2 + 30t$ responda:

a) Qual a altura do objeto 4 segundos após o lançamento?

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura?

RESPOSTA

a) Para calcular a altura 4 segundos após o lançamento, basta substituir $t = 4$ na função da altura $h(t)$.

$$h(4) = -5 \cdot (4)^2 + 30 \cdot 4$$

$$h(4) = -5 \cdot 16 + 120$$

$$h(4) = -80 + 120$$

$$h(4) = 40 \text{ metros}$$

Portanto, a altura do objeto 4 segundos após o lançamento é 40 metros.

b) Agora, queremos saber o tempo t em que a altura é igual a 40 metros. Ou seja, devemos resolver a equação: $h(t) = 40$

Substituindo na fórmula da altura: $40 = -5t^2 + 30t$

Rearranjando a equação: $5t^2 - 30t + 40 = 0$

Dividindo toda a equação por 5 para simplificar: $t^2 - 6t + 8 = 0$

Agora, resolvemos essa equação quadrática usando a fórmula de Bhaskara:

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$t = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Agora temos duas soluções para t :

$$t = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$t = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, o objeto encontra-se a 40 metros de altura 2 segundos após o lançamento e também 4 segundos após o lançamento.

EXERCÍCIO 2

(Enem) Uma escola analisou as propostas de cinco empresas para alugar uma máquina fotocopadora que atenda à demanda de 12000 cópias mensais. Cada empresa cobra um valor fixo pelo aluguel mensal da máquina, mais um valor proporcional ao número de cópias realizadas, ambos em real. Assim, **o custo total** $C(x)$, do aluguel de uma máquina, que atenda a uma demanda de x **cópias mensais**, em cada uma das cinco empresas, pode ser dado pelas expressões:

$$\text{Empresa I : } C(x) = 500 + 0,40x$$

$$\text{Empresa II : } C(x) = 800 + 0,50x$$

$$\text{Empresa III : } C(x) = 2000 + 0,20x$$

$$\text{Empresa IV : } C(x) = 1100 + 0,25x$$

$$\text{Empresa V : } C(x) = 600 + 0,30x$$

A escola escolheu a empresa que apresentou a proposta que fornecia o serviço necessário pelo menor custo mensal. A empresa escolhida foi a:

- A) I B) II. C) III. D) IV. E) V.

RESPOSTA

Vamos calcular o custo total C para cada empresa, considerando uma demanda de 12000 cópias mensais (ou seja, $x = 12000$).

Empresa I: A fórmula para o custo é: $C(x) = 500 + 0,40x$. Substituindo $x = 12000$:

$$C(x) = 500 + 0,40 \cdot 12000 = 500 + 4800 = 5300$$

Empresa II: A fórmula para o custo é: $C(x) = 800 + 0,50x$. Substituindo $x = 12000$:

$$C(x) = 800 + 0,50 \cdot 12000 = 800 + 6000 = 6800$$

Empresa III: A fórmula para o custo é: $C(x) = 2000 + 0,20x$. Substituindo $x = 12000$:

$$C(x) = 2000 + 0,20 \cdot 12000 = 2000 + 2400 = 4400$$

Empresa IV: A fórmula para o custo é: $C(x) = 1100 + 0,25x$. Substituindo $x = 12000$:

$$C(x) = 1100 + 0,25 \cdot 12000 = 1100 + 3000 = 4100$$

Empresa V: A fórmula para o custo é: $C(x) = 600 + 0,30x$. Substituindo $x = 12000$:

$$C(x) = 600 + 0,30 \cdot 12000 = 600 + 3600 = 4200$$

Comparando os custos:

Empresa I: 5300

Empresa II: 6800

Empresa III: 4400

Empresa IV: 4100

Empresa V: 4200

Logo, a empresa IV apresenta o menor custo, que é 4100 reais.



Material Extra



LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS - FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICAS

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 72 e 73, ainda as páginas: 123 e 124.



LIVRO MATEMÁTICA PRISMA - CONJUNTOS E FUNÇÕES

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 96 e 97. Ainda as páginas: 126, 127, 128 e 129.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.



Comparação de funções lineares: equação X gráfico



Interprete o gráfico de uma expressão do segundo grau





Atividades

O texto a seguir é referência para as atividades 1, 2 e 3.

Uma empresa fabrica um produto e percebe que seus custos fixos mensais somam R\$ 20.000,00, enquanto o custo por unidade fabricada é de R\$ 50,00. Além disso, a empresa vende cada unidade desse produto por R\$ 120,00.

Considere que o lucro mensal da empresa $L(x)$ é dado pela diferença entre a receita $R(x)$ e os custos totais $C(x)$, onde: $R(x) = 120x$ e $C(x) = 20000 + 50x$.

ATIVIDADE 1

Qual é o custo para fabricar 300 unidades?

- A) 40 000
- B) 35 000
- C) 30 000
- D) 25 000
- E) 20 000

ATIVIDADE 2

No mínimo, quantas unidades devem ser fabricadas para essa empresa começar a ter lucro?

- A) 284
- B) 285
- C) 286
- D) 287
- E) 288

ATIVIDADE 3

Quantas unidades precisam ser vendidas, no mínimo, para que a empresa obtenha um lucro acima de R\$ 10.000 no mês?

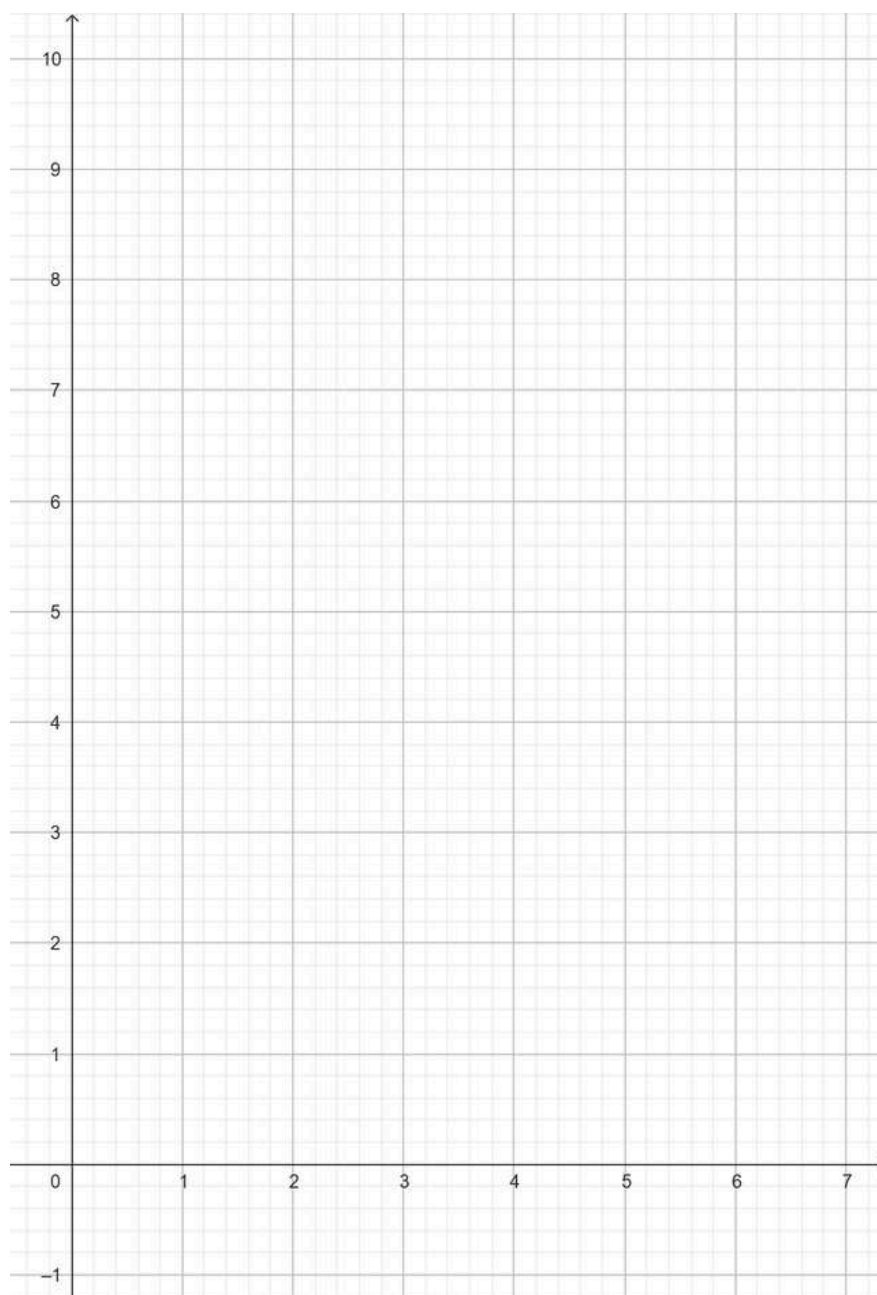
- A) 426
- B) 427
- C) 428
- D) 429
- E) 430

ATIVIDADE 4

O movimento de um móvel foi observado e a sua posição foi registrada durante um intervalo de tempo. A tabela abaixo apresenta a posição y (em metros) desse móvel em função do tempo x (em segundos).

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	5	8	9	8	5	0

Esboce o gráfico utilizando os dados da tabela acima e identifique o tipo de função correspondente ao gráfico.



ATIVIDADE 5

Uma empresa de pintura é contratada para pintar paredes externas de casas, com áreas menores que 60 m^2 . O preço cobrado pela pintura depende da área da parede a ser pintada. Para áreas menores, o preço é baseado no custo fixo inicial e no custo por metro quadrado. No entanto, para áreas maiores, a empresa oferece um desconto proporcional ao aumento da área, o que faz com que o preço total seja descrito por uma função quadrática onde $f(x)$ é o preço cobrado para pintar uma parede de área $x \text{ m}^2$. Sabe-se que, se $x = 0$ então $f(x) = 0$, se $x = 10$ então $f(x) = 350$ reais e, se $x = 20$ então $f(x) = 600$ reais. Qual é a lei (expressão) que define essa função quadrática?

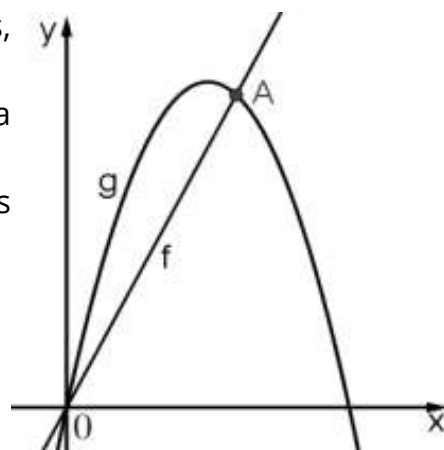
- A) $f(x) = 0,5x^2 + 40x$
- B) $f(x) = 0,5x^2 - 40x$
- C) $f(x) = -0,5x^2 + 40x$
- D) $f(x) = -0,5x^2 - 40x$
- E) $f(x) = 40x^2 - 0,5x$

ATIVIDADE 6

Ao lado temos o gráfico de duas funções polinomiais, uma de 1° grau e outra de 2° grau.

A função de 1° grau é expressa pela lei $f(x) = 2x$ e a função de 2° grau é expressa pela lei $g(x) = -2x^2 + 10x$. Quais são as coordenadas do ponto A onde os dois gráficos se intersectam?

- A) $A = (5, 0)$
- B) $A = (0, 5)$
- C) $A = (8, 4)$
- D) $A = (4, 8)$
- E) $A = (4, 0)$



ATIVIDADE 7

x	f(x)
0	5
1	7
2	9
3	11

Em relação aos valores na tabela ao lado, julgue cada uma das afirmativas a seguir em Verdadeira ou Falsa.

- A) A função que relaciona os valores de x com os valores de $f(x)$ é polinomial de 1° grau;
- B) A função que relaciona os valores de x com os valores de $f(x)$ é polinomial de 2° grau;
- C) Se mantido o padrão mostrado nessa tabela, para $x = 5$ tem-se $f(x) = 17$;
- D) A lei para essa função é $f(x) = x^2 + 5$ e, portanto, $f(5) = 30$;
- E) A lei para essa função é $f(x) = 2x + 5$ e, portanto, $f(5) = 15$.

O texto a seguir é referência para as atividades 8, 9 e 10.

Um comerciante avaliou que, para uma certa mercadoria, o lucro obtido na venda de x unidades, a partir da venda de uma unidade, é calculado pela expressão $L(x) = 10 + 1,2x$.

ATIVIDADE 8

Se ele vende 50 unidades, então qual o lucro obtido?

- A) 40 reais
- B) 70 reais
- C) 80 reais
- D) 90 reais
- E) 110 reais

ATIVIDADE 9

Qual é o lucro desse comerciante na venda de 70 unidades?

- A) 50 reais
- B) 65 reais
- C) 94 reais
- D) 100 reais
- E) 105 reais

ATIVIDADE 10

Quantas unidades o comerciante deve vender para obter lucro de R\$ 970,00?

- A) 600 unidades
- B) 650 unidades
- C) 700 unidades
- D) 750 unidades
- E) 800 unidades



Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

KHAN ACADEMY. Interprete o gráfico de uma expressão do segundo grau. Khan Academy, 2025. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-quadratica/x34e9dd8107ca5eda:untitled-705/e/funcao-quadratica>. Acesso em: 23 mar. 2025.
. Acesso em: 02 abr. 2025.

KHAN ACADEMY. Comparação de funções lineares: equação X gráfico. Khan Academy, 2025. Disponível em:
[ACADEMIA KHANACADEMIA KHAN. Algoritmos . Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/1-serie-em-mat-sp/x82b03a9b6c8af113:untitled-579/x82b03](https://pt.khanacademy.org/math/1-serie-em-mat-sp/x82b03a9b6c8af113:untitled-579/x82b03). Acesso em: 02 abr. 2025.

