GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL
GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT308 Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	• Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) na resolução de problemas. • Aplicar a Lei dos Senos na resolução de problemas. • Aplicar a Lei dos Cossenos na resolução de problemas. • Resolver problemas de cálculo de medidas, decidindo entre os conceitos de congruência, semelhança ou as relações métricas e as trigonométricas em triângulos, aquele mais adequado para cada situação e contexto.	**D049_M** Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas. **D051_M** Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Contextualização

Nas últimas duas semanas, exploramos as simetrias e iniciamos o estudo dos triângulos, com destaque para o triângulo retângulo. No entanto, os triângulos retângulos são apenas um caso particular dentro de uma grande variedade de formas triangulares que encontramos em situações reais.

Na engenharia, na física, na astronomia e em muitas outras áreas, é comum nos depararmos com triângulos que não são retângulos. Isso nos leva a uma pergunta importante: como estabelecer relações entre as medidas dos lados, nesses casos?

Ao contrário do que vimos com os triângulos retângulos, onde o Teorema de Pitágoras oferece uma solução direta, aqui o processo exige um pouco mais. Para resolver problemas envolvendo triângulos quaisquer, precisamos de uma informação adicional: os ângulos desses triângulos!

Detalhe de triângulos em um ponte

As Leis dos Senos e Cossenos são utilizadas para determinar rotas marítimas

Nesta semana, vamos estudar duas ferramentas: a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Essas leis nos permitem trabalhar com as medidas dos lados e ângulos de qualquer triângulo, mesmo quando ele não é retângulo.

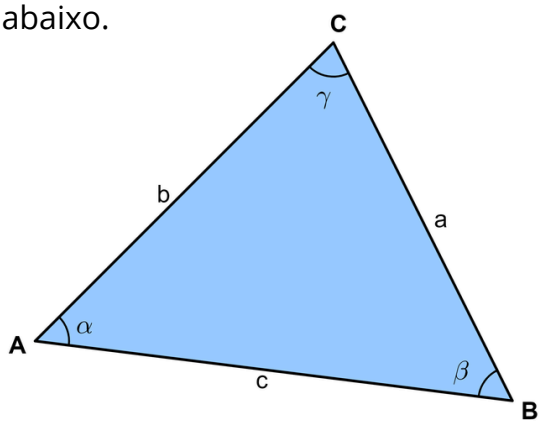
Com elas, você será capaz de resolver problemas mais complexos e ampliar sua compreensão sobre a geometria dos triângulos.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

LEI DOS SENOS

Considere o triângulo ABC abaixo.



A lei dos senos afirma que:

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos.

Assim, dado um triângulo qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos, como indicados no triângulo acima, vale a relação:

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}.$$

Considere a seguinte situação para exemplificar o processo acima: Um barco pesqueiro A emite um sinal de socorro que é recebido por outros dois barcos, B e C, distantes entre si 70 km. Sabendo que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem, respectivamente, 64° e 50°, responda: Qual dos barcos, B ou C, se encontra mais próximo do barco pesqueiro? A que distância ele está do barco A? *Use: sen 66°=0,91; sen 64°=0,9; e, sen 50°=0,77.*

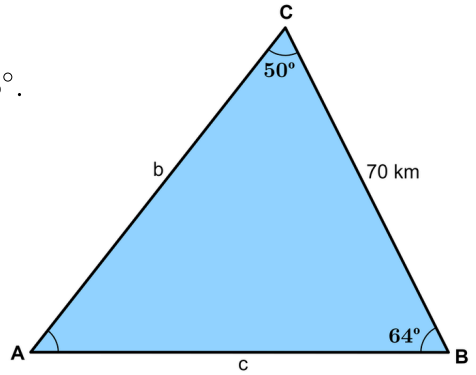
Podemos representar a situação como o triângulo abaixo. Dessa forma, a medida do ângulo $\hat{A}$ pode ser determinada:

$$\hat{A} + 50° + 64° = 180° \Rightarrow \hat{A} = 180° - 114° = 66°.$$

Assim,

$$\frac{70}{sen\ 66°} = \frac{b}{sen\ 64°} = \frac{c}{sen\ 50°}.$$

1 2



Desenvolvendo as duas proporções destacadas, obtemos:

1

$$\frac{70}{sen\ 66°} = \frac{b}{sen\ 64°} \Rightarrow \frac{70}{0,91} = \frac{b}{0,9} \Rightarrow 0,91 \cdot b = 70 \cdot 0,9 \Rightarrow b = \frac{63}{0,91} \approx 69,2km.$$

2

$$\frac{70}{sen\ 66°} = \frac{c}{sen\ 50°} \Rightarrow \frac{70}{0,91} = \frac{c}{0,77} \Rightarrow 0,91 \cdot c = 70 \cdot 0,77 \Rightarrow c = \frac{53,9}{0,91} \approx 59,2km.$$

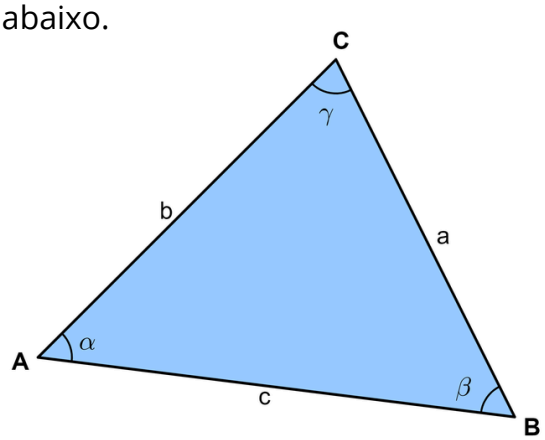
Portanto, o barco B se encontra a, aproximadamente, 59,2 km do navio pesqueiro A e está mais próximo dele do que o barco C.

Prezada Professora, Prezado Professor,

É importante discutir com os estudantes sobre a relação de igualdade envolvendo três razões e que, tomando duas a duas, você não interfere nela.

LEI DOS COSSENOS

Considere o triângulo ABC abaixo.



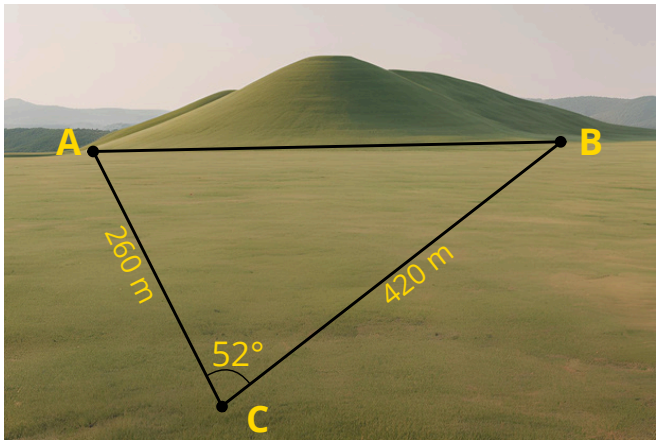
A lei dos cossenos afirma que:

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

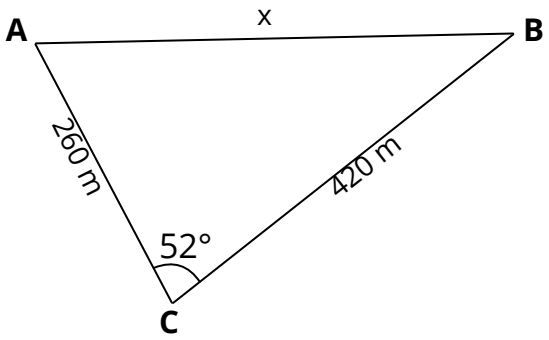
Assim, dado um triângulo qualquer com as medidas dos lados e os ângulos como indicados no triângulo acima, valem as relações:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\ \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\ \gamma \end{cases}$$

Considere o seguinte problema: Um engenheiro quer construir um túnel entre os pontos A e B, onde se localiza um morro, conforme o esquema a seguir. Do ponto C ele visualiza os pontos A e B e obtém os valores AC=260 m, BC=420 m e $\hat{C}$=52°. Qual será o comprimento desse túnel, representado, na figura, pela distância entre os pontos A e B?
Use cos 52°=0,62.



O triângulo que representa a situação é o triângulo abaixo:



Note que desejamos determinar o valor do lado AB e temos a informação das medidas dos lados AC e BC e do ângulo $\hat{C}$. Dessa forma podemos aplicar a lei dos cossenos:

$$x^2 = 260^2 + 420^2 - 2 \cdot 260 \cdot 420 \cdot cos\ 52° \Rightarrow x^2 = 67\,600 + 176\,400 - 218\,400 \cdot 0,62$$
$$x^2 = 67\,600 + 176\,400 - 135\,408$$
$$x^2 = 108\,592$$
$$x = \sqrt{108\,592} \approx 329,53m.$$

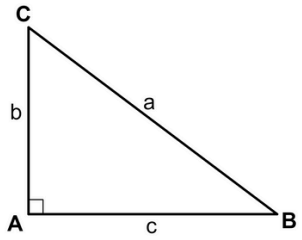
Portanto, o túnel terá, aproximadamente, 329,53 m de comprimento.

Prezada Professora, Prezado Professor,

é comum que os estudantes apresentem algumas dúvidas de quando aplicar a lei dos senos ou a lei dos cossenos. Caso isso aconteça, é válido discutir sobre os elementos que são necessários nas equações apresentadas.
Por exemplo, é possível indicar, na lei dos senos, que a maior parte dos problemas apresentaram dois ângulos e um lado; já na lei dos cossenos, os problemas apresentaram dois lados e o ângulo formado por esses lados.
Cabe lembrar que isso não é uma regra, apenas uma interpretação das fórmulas a fim de facilitar a compreensão.

O Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos

Na última semana vimos o Teorema de Pitágoras, vamos recordar:



Teorema de Pitágoras
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos:

Se aplicarmos a lei dos cossenos no triângulo acima obteremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{cos(90°)}_{0} = b^2 + c^2.$$

Ou seja, voltamos ao Teorema de Pitágoras. Por conta desse fato, algumas vezes, você poderá escutar falar que a lei dos cossenos é como uma 'generalização do Teorema de Pitágoras', e isso nos leva a uma aplicação interessante da lei dos cossenos: classificar os triângulos em acutângulo, retângulo ou obtusângulo apenas sabendo a medida de seus lados.

Como você deve se recordar, o cosseno de ângulos entre 0° e 90° são valores não negativos, no entanto, o cosseno de ângulos maiores que 90° e menores que 180° são valores negativos e isso influencia a comparação entre os valores a^2 e b^2+c^2 presentes tanto no Teorema de Pitágoras quanto na lei dos cossenos, observe:

ângulo entre 0° e 90°: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{cos(\alpha)}_{>0} \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2.$ ➤ **Triângulo acutângulo**

ângulo de 90°: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{cos(\alpha)}_{=0} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$ ➤ **Triângulo retângulo**

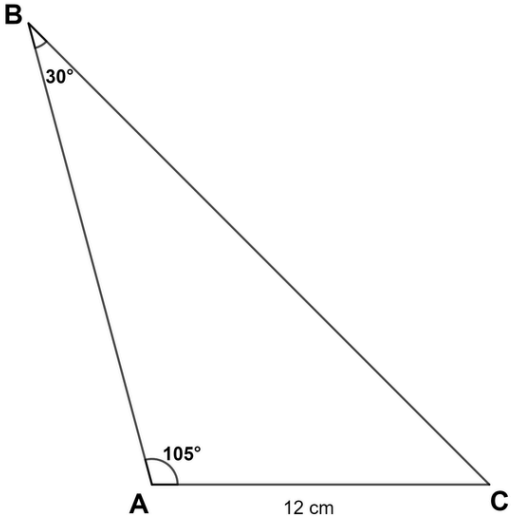
ângulo entre 90° e 180°: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{cos(\alpha)}_{<0} \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$ ➤ **Triângulo obtusângulo**

Prezada Professora, Prezado Professor,

é necessário ter um cuidado ao fazer a discussão acima, sobre ângulos obtusos, com os estudantes visto que, ainda não foi abordado sobre a circunferência trigonométrica. Durante este material, quando aparecer os ângulos obtusos, os valores de seno e cosseno serão fornecidos. Contudo, explique que, mais adiante, eles aprenderão a determinar esses valores.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1:10000, como na figura abaixo. Qual a distancia, em km, entre as ilhas A e B?



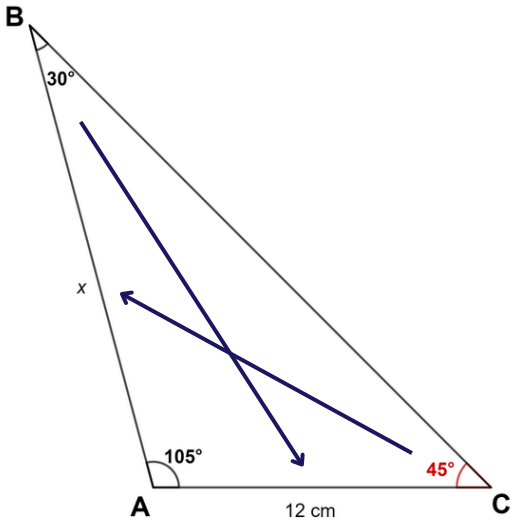
Dados

$$\sqrt{2} = 1,41$$
$$sen(30°) = \frac{1}{2}$$
$$sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solução: Desejamos encontrar a medida do lado AB do triângulo ABC. Observe que é possível determinar o ângulo que falta na representação no triângulo:

$$30° + 105° + A\hat{C}B = 180° \Rightarrow A\hat{C}B = 108° - 135° = 45°.$$

Daí, obtemos



Podemos aplicar a lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{12}{sen\,30°} = \frac{x}{sen\,45°} \Rightarrow \frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

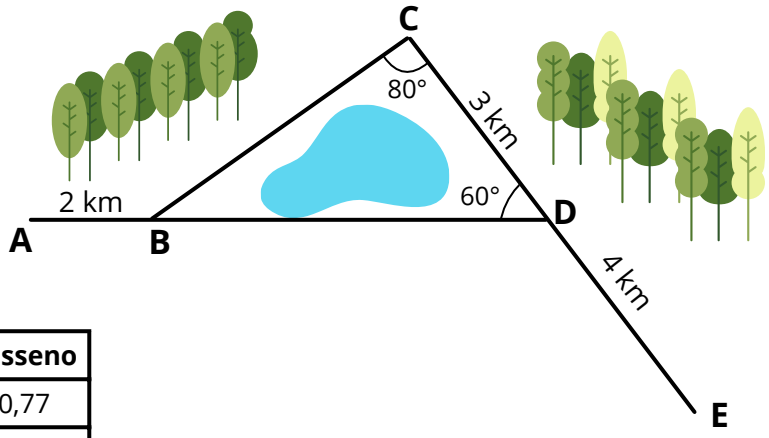
$$12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x\frac{1}{2}$$

$$x = 12 \cdot \sqrt{2}\ cm.$$

Como o mapa está em uma escala de 1:10000, isto é, a cada 1 cm no mapa corresponde 100 m na realidade, a distância entre as ilhas A e B é

$$12 \cdot \sqrt{2} \cdot 100 = 1\,200 \cdot \sqrt{2}\ m \approx 1\,692\ m = 1,692\ km.$$

EXERCÍCIO 2. Em uma trilha, uma pessoa sai do ponto A com destino ao ponto E. Ela pode escolher fazer o trajeto passando pelo ponto C ou não, conforme mostra o mapa abaixo

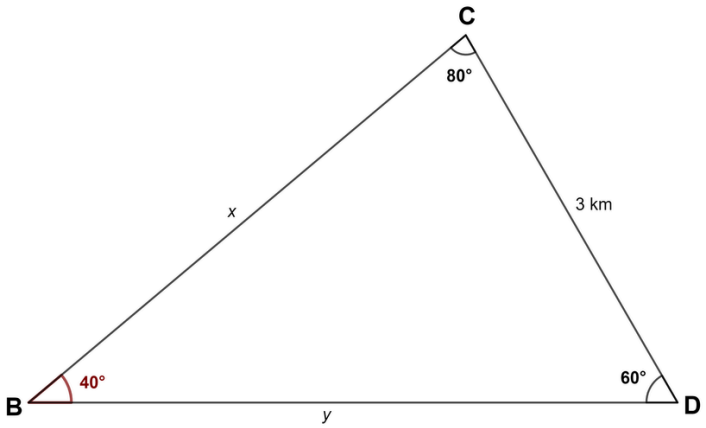


Dados

ângulo	seno	cosseno
40°	0,64	0,77
60°	0,87	0,5
80°	0,98	0,17

Quantos quilômetros a mais, aproximadamente, uma pessoa que deseja passar pelo ponto C, anda em relação a uma pessoa que não passa por esse ponto?

Solução: Para respondermos essa questão devemos determinar as medidas dos segmentos BC e BD, portanto vamos trabalhar no triângulo ACD, observe abaixo:



Podemos, inicialmente, aplicar a lei dos senos para determinar o valor de *x*:

$$\frac{3}{sen\,40°} = \frac{x}{sen\,60°} \Rightarrow \frac{3}{0,64} = \frac{x}{0,87} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 0,87}{0,64} \approx 4,08\ km.$$

Para determinar o valor de y podemos usar a lei dos senos novamente ou aplicar a lei dos cossenos. Seguiremos usando a lei dos senos:

$$\frac{3}{sen\,40°} = \frac{y}{sen\,80°} \Rightarrow \frac{3}{0,64} = \frac{y}{0,98} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 0,98}{0,64} \approx 4,59\ km.$$

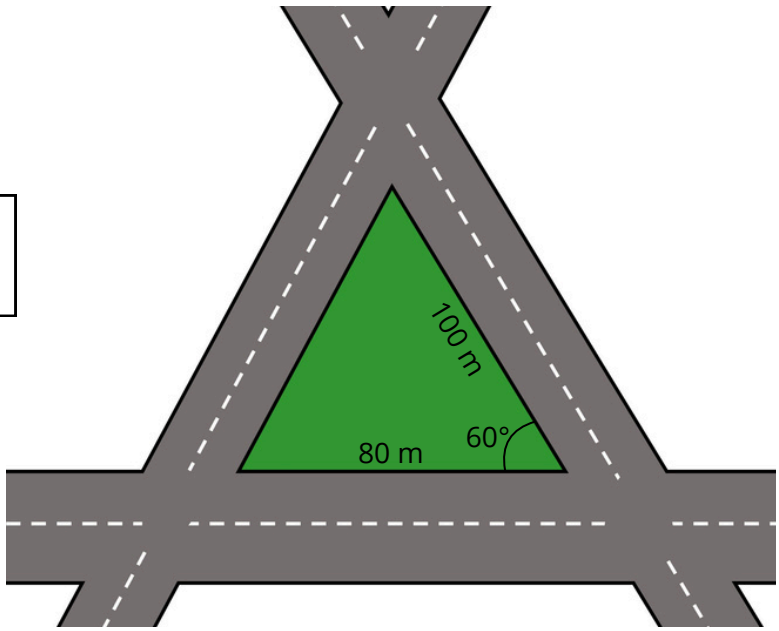
Fazendo o trajeto ABCDE a pessoa percorrerá 2+4,08+3+4=13,08 km, já fazendo o trajeto ABDE a pessoa percorrerá 2+4,59+4=10,59 km. Portanto a diferença entre os dois trajetos é de 2,49 km.

EXERCÍCIO 3. Uma praça de formato triangular, localizada entre três ruas, está representada na figura seguinte. O prefeito da cidade deseja plantar mudas de um mesmo tipo de arbusto ao longo de todo o perímetro dessa praça, seguindo a orientação de que cada muda deve ser posicionada exatamente a 50 cm de distância da seguinte. Considerando que o plantio começará em um vértice e seguirá até completar o contorno total da praça, qual é o número mínimo de mudas que precisam ser adquiridas para realizar o projeto?

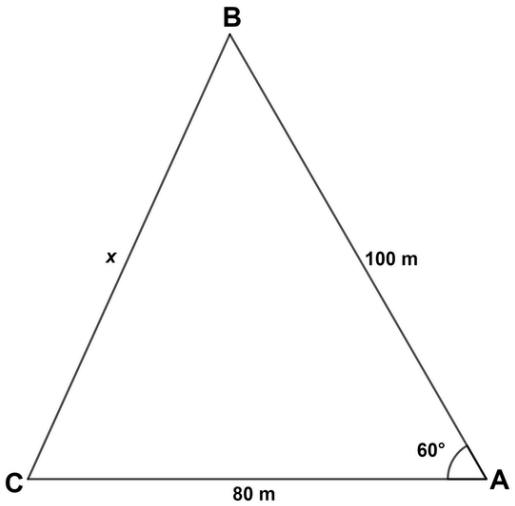
Dados

$\sqrt{21} = 4,6$

$sen(60°) = 0,5$



Solução: Para determinarmos o número de mudas que devem ser adquiridas devemos determinar a medida do lado faltante. Observe o triângulo abaixo:



No triângulo ABC podemos aplicar a lei dos cossenos para determinar a medida x:

$$x^2 = 100^2 + 80^2 - 2 \cdot 100 \cdot 80 \cdot cos\,60°$$
$$= 10\,000 + 6\,400 - 16\,000 \cdot 0,5$$
$$= 16\,400 - 8\,000 = 8\,400$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{8400} = \sqrt{21 \cdot 4 \cdot 100} = 2 \cdot 10\sqrt{21}$$
$$\Rightarrow x \approx 92\ m.$$

Portanto, o contorno da praça tem, aproximadamente, 100+92+80= 272 m de comprimento. Como cada muda deve ser plantada a 50 cm de distância uma da outra, a cada metro deve-se plantar 2 mudas, assim, a prefeitura deverá adquirir 2·272=544 mudas.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 3 (Geometria e Trigonometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**

- p. 73-78.

2. **Volume 4 (Trigonometria e Sistemas Lineares) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**

- p. 30-37.

CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

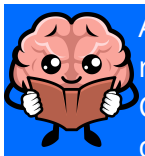
Para complementar a discussão sobre a relação entre o Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos sugerimos a aplicação no GeoGebra que pode ser acessada aqui ou pelo QR Code ao lado.

PORTAL DA MATEMÁTICA

O módulo 'Lei dos Senos e dos Cossenos' do Portal da Matemática apresenta vídeos, material teórico e caderno de exercícios sobre o tema e sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, que também pode ser utilizado, caso o professor considere necessário um momento de revisão.

O site pode ser acessado por aqui ou pelo QR Code ao lado.

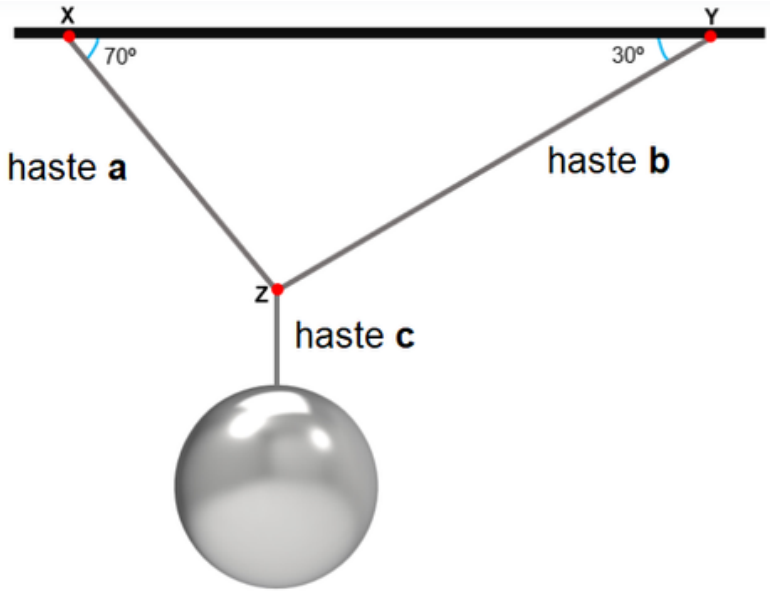
Atividades



Ao final das atividades, disponibilizamos uma tabela trigonométrica. Nela, as razões trigonométricas são apresentadas com quatro casas decimais. Contudo, orientamos utilizar uma aproximação para uma ou duas casas decimais. Caso utilize as quatro casas decimais, sugerimos a utilização da calculadora.

ATIVIDADE 1

Uma esfera está em equílibrio pendurada por três hastes de aço, conforme o esquema a seguir:



As hastes **a** e **b** estão conectadas a haste **c** por uma de suas pontas. As outras pontas, distantes 85 cm uma da outra, estão fixadas numa barra metálica. Determine os comprimentos das hastes **a** e **b**.

ATIVIDADE 2

Dois lados de um triângulo medem 64 cm e 144 cm e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule a medida do terceiro lado desse triângulo.

Utilize: $\sqrt[3]{7} \cong 2{,}65$

$\sqrt[3]{19} \cong 4{,}36$

sen 120º = 0,866
cos 120º = - 0,5
tg 120º = - 1,7321

ATIVIDADE 3

Um triângulo tem lados medindo 12 cm, 15 cm e 18 cm. Qual é o cosseno do maior ângulo desse triângulo?

ATIVIDADE 4

O mapa a seguir contém a localização de três pontos turísticos da Lagoa Juparanã, situada em Linhares-ES. Nele, foi apresentado um modelo matemático, para destacar algumas medidas.

Fonte: Adaptado de https://google.com/maps

Determine a menor distância entre a Lagoa Lençol Grande e a Praia do Retiro.

Utilize: $\sqrt[2]{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt[2]{619} \cong 24{,}88$

ATIVIDADE 5

Um carpinteiro está projetando um paralelogramo para ser usado como base de uma estrutura decorativa em um jardim. Ele sabe que dois lados consecutivos dessa forma têm medidas de 8 dm e 12 dm, e que o ângulo entre esses dois lados é de 60º. Para garantir que a estrutura seja estável e bem equilibrada, ele precisa saber as medidas das diagonais do paralelogramo. Determine as medidas das diagonais desse paralelogramo.

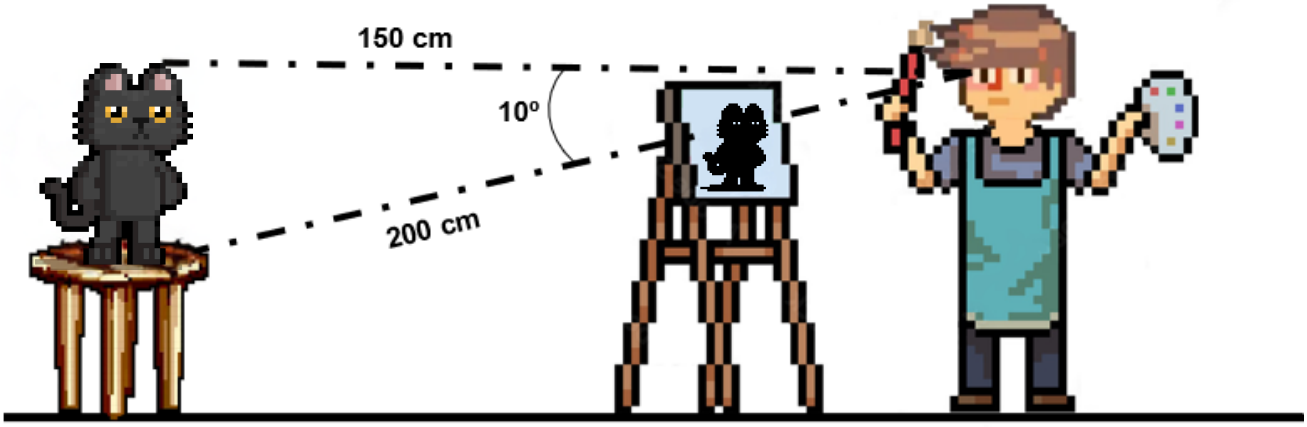
sen 120º = 0,866
cos 120º = - 0,5
tg 120º = - 1,7321

ATIVIDADE 6

Um agrimensor está trabalhando em um projeto para mapear uma superfície triangular de terra. Ao fazer um modelo matemático dessa superfície, ele identifica que dois ângulos desse triângulo medem 40º e 60º, e que o lado oposto ao ângulo de 40º tem uma medida de 15 metros. Para completar o levantamento topográfico, ele precisa saber a medida do lado oposto ao ângulo de 60º. Determine essa medida.

ATIVIDADE 7

Um treinador de monstrinhos resolveu retratar o seu "Darkcat" numa tela. Ele se posicionou conforme a figura abaixo.



Determine a altura aproximada desse "Darkcat".

Utilize: $\sqrt[2]{853} \cong 29{,}21$

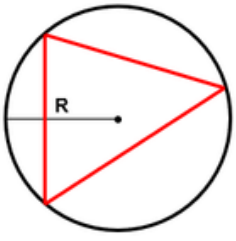
ATIVIDADE 8

Uma das relações que pode ser aplicada a qualquer triângulo inscrito em uma circunferência de raio **R** envolve a **Lei dos Senos**:

$$2r = \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Determine o raio de uma circunferência circunscrita ao triângulo ABC, cujo lado **a** mede 45 mm e o ângulo **Â**, oposto ao lado **a**, é de 30º

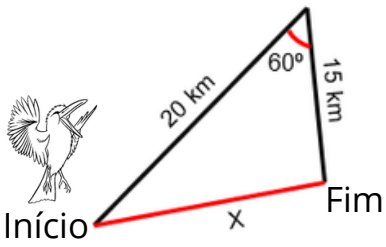
Triângulo **inscrito** na circunferência ou circunferência **circunscrita** ao triângulo



ATIVIDADE 9

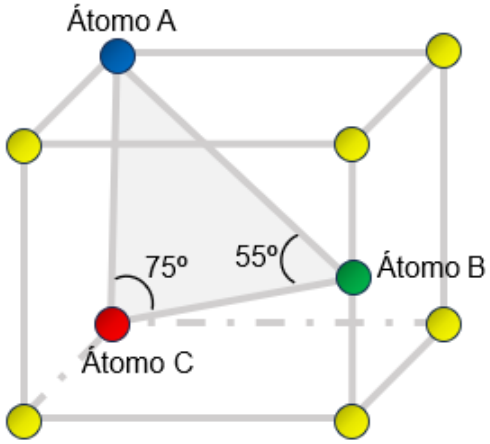
Em uma pesquisa sobre o comportamento migratório de aves, os cientistas observaram que uma ave migrou 20 quilômetros em direção ao nordeste e depois mudou sua rota para seguir por mais 15 quilômetros em direção que forma um ângulo de 60º com a rota inicial. Qual é a distância direta entre o ponto inicial e o ponto final da migração?

Utilize: $\sqrt[2]{13} \cong 3{,}61$



ATIVIDADE 10

Em um experimento de cristalografia, os cientistas estão estudando a estrutura cristalina de um composto orgânico. Eles descobriram que três átomos, denominados **Átomo A**, **Átomo B** e **Átomo C**, formam um triângulo dentro dessa estrutura. A imagem abaixo, mostra essa estrutura. A distância entre o **Átomo A** e o **Átomo B** é de 6 angströms (**Å**). Se o ângulo oposto à essa distância medir 75º e o ângulo oposto à distância entre os **Átomos A** e **C** medir 55º, qual será a distância entre o **Átomo C** e o **Átomo B**?



→ O angstrom (**Å**) é uma unidade de medida de comprimento, equivalente a 10^{-10} metros, ou seja, 0,1 nanômetros (**nm**). Essa unidade é frequentemente usada em Física e Química para medir distâncias na escala atômica e molecular, como o tamanho de moléculas e a distância entre átomos em estruturas cristalinas.

Tabela de Relações Trigonométricas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1º	0,0175	0,9998	0,0175	31º	0,5150	0,8572	0,6009	61º	0,8746	0,4848	1,8040
2º	0,0349	0,9994	0,0349	32º	0,5299	0,8480	0,6249	62º	0,8829	0,4695	1,8807
3º	0,0523	0,9986	0,0524	33º	0,5446	0,8387	0,6494	63º	0,8910	0,4540	1,9626
4º	0,0698	0,9976	0,0699	34º	0,5592	0,8290	0,6745	64º	0,8988	0,4384	2,0503
5º	0,0872	0,9962	0,0875	35º	0,5736	0,8192	0,7002	65º	0,9063	0,4226	2,1445
6º	0,1045	0,9945	0,1051	36º	0,5878	0,8090	0,7265	66º	0,9135	0,4067	2,2460
7º	0,1219	0,9925	0,1228	37º	0,6018	0,7986	0,7536	67º	0,9205	0,3907	2,3559
8º	0,1392	0,9903	0,1405	38º	0,6157	0,7880	0,7813	68º	0,9272	0,3746	2,4751
9º	0,1564	0,9877	0,1584	39º	0,6293	0,7771	0,8098	69º	0,9336	0,3584	2,6051
10º	0,1736	0,9848	0,1763	40º	0,6428	0,7660	0,8391	70º	0,9397	0,3420	2,7475
11º	0,1908	0,9816	0,1944	41º	0,6561	0,7547	0,8693	71º	0,9455	0,3256	2,9042
12º	0,2079	0,9781	0,2126	42º	0,6691	0,7431	0,9004	72º	0,9511	0,3090	3,0777
13º	0,2250	0,9744	0,2309	43º	0,6820	0,7314	0,9325	73º	0,9563	0,2924	3,2709
14º	0,2419	0,9703	0,2493	44º	0,6947	0,7193	0,9657	74º	0,9613	0,2756	3,4874
15º	0,2588	0,9659	0,2679	45º	0,7071	0,7071	1,0000	75º	0,9659	0,2588	3,7321
16º	0,2756	0,9613	0,2867	46º	0,7193	0,6947	1,0355	76º	0,9703	0,2419	4,0108
17º	0,2924	0,9563	0,3057	47º	0,7314	0,6820	1,0724	77º	0,9744	0,2250	4,3315
18º	0,3090	0,9511	0,3249	48º	0,7431	0,6691	1,1106	78º	0,9781	0,2079	4,7046
19º	0,3256	0,9455	0,3443	49º	0,7547	0,6561	1,1504	79º	0,9816	0,1908	5,1446
20º	0,3420	0,9397	0,3640	50º	0,7660	0,6428	1,1918	80º	0,9848	0,1736	5,6713
21º	0,3584	0,9336	0,3839	51º	0,7771	0,6293	1,2349	81º	0,9877	0,1564	6,3138
22º	0,3746	0,9272	0,4040	52º	0,7880	0,6157	1,2799	82º	0,9903	0,1392	7,1154
23º	0,3907	0,9205	0,4245	53º	0,7986	0,6018	1,3270	83º	0,9925	0,1219	8,1443
24º	0,4067	0,9135	0,4452	54º	0,8090	0,5878	1,3764	84º	0,9945	0,1045	9,5144
25º	0,4226	0,9063	0,4663	55º	0,8192	0,5736	1,4281	85º	0,9962	0,0872	11,4301
26º	0,4384	0,8988	0,4877	56º	0,8290	0,5592	1,4826	86º	0,9976	0,0698	14,3007
27º	0,4540	0,8910	0,5095	57º	0,8387	0,5446	1,5399	87º	0,9986	0,0523	19,0811
28º	0,4695	0,8829	0,5317	58º	0,8480	0,5299	1,6003	88º	0,9994	0,0349	28,6363
29º	0,4848	0,8746	0,5543	59º	0,8572	0,5150	1,6643	89º	0,9998	0,0175	57,2900
30º	0,5000	0,8660	0,5774	60º	0,8660	0,5000	1,7321	90º	1,0000	0,0000	-

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: geometria plana e espacial. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3:** trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

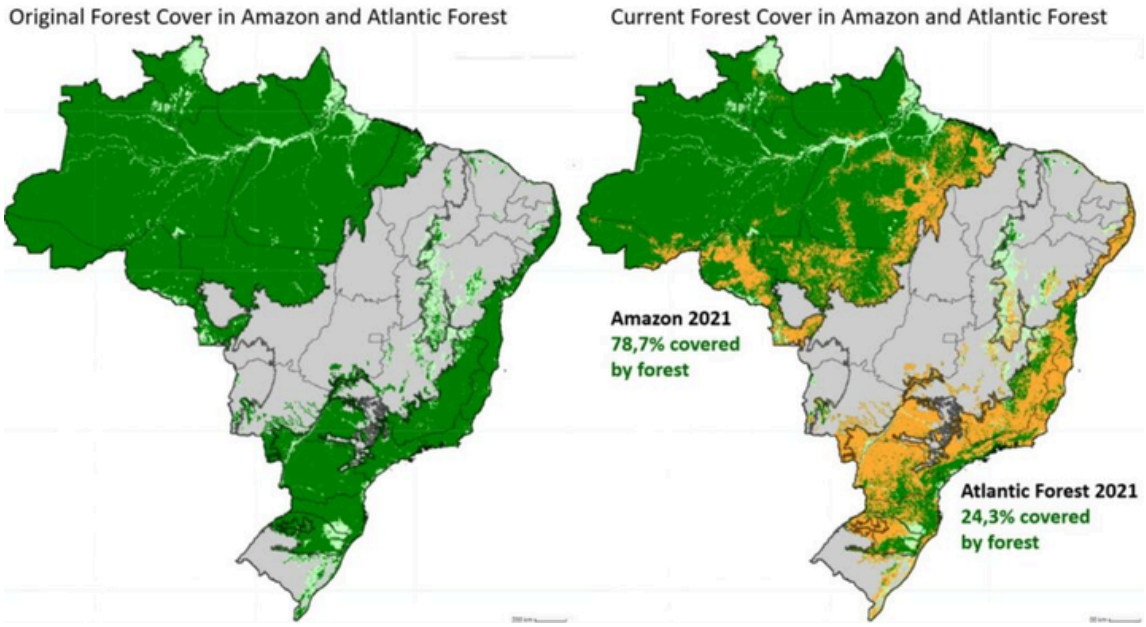
HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT307 Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Conhecer expressões de cálculo de áreas de figuras poligonais e circulares. • Resolver situações-problema envolvendo a área de superfícies planas em contextos diversos, utilizando a decomposição da superfície, a reconfiguração ou as expressões algébricas para o cálculo de áreas de polígonos e círculos.	**D058_M** Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.

Contextualização

Desde a antiguidade, a necessidade de medir áreas esteve ligada ao desenvolvimento das civilizações. Os egípcios, por exemplo, já utilizavam princípios geométricos para demarcar terrenos agrícolas após as cheias do Rio Nilo. Na Mesopotâmia, tabletes de argila registravam cálculos de áreas de campos para fins tributários, evidenciando que a medição de superfícies sempre foi crucial para a organização social e econômica.

Hoje, com avanços tecnológicos, essa prática ganhou novas dimensões. Órgãos ambientais e instituições de pesquisa utilizam imagens de satélite de alta resolução para monitorar em tempo real o desmatamento de biomas como a Amazônia ou o Cerrado. Por meio de softwares geoespaciais, é possível calcular a área desmatada com precisão milimétrica, identificar focos de queimadas e até prever impactos climáticos. Além disso, no agronegócio, sensores e drones mapeiam terrenos agrícolas para estimar a produtividade de safras, otimizando o uso de insumos e reduzindo desperdícios.

No cotidiano, a medição de áreas continua essencial, seja para revestir o piso de uma sala, calcular o tamanho de uma quadra esportiva ou planejar a distribuição de móveis em um ambiente. Entender técnicas de cálculo de área é uma habilidade prática.



Cobertura florestal original e dos remanescentes em 2021 na Amazônia (78,7%) e na Mata Atlântica (24,3%).
Disponível em: https://www.sosma.org.br/artigos/licoes-de-governanca-da-mata-atlantica-para-a-preservacao-da-amazonia/. Acesso em 20 de fevereiro de 2025.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

O CONCEITO DE POLÍGONO

Chamamos de polígono uma linha poligonal fechada simples.

Observe as figuras abaixo:

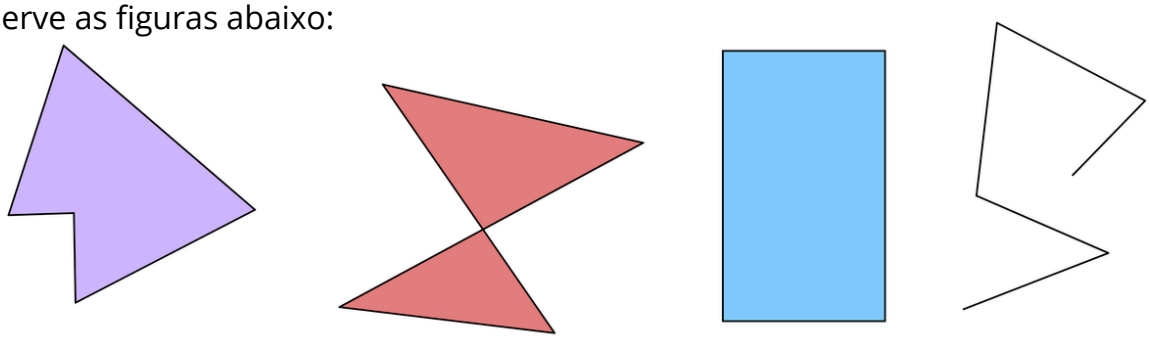
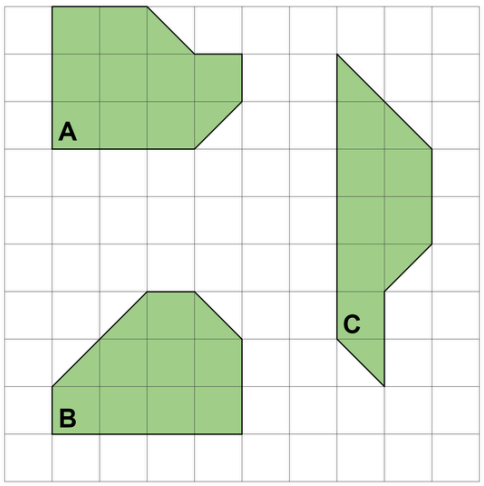


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Apenas as Figuras 1 e 3 são polígonos, pois são fechadas e simples, isto é, os segmentos de reta não se interceptam. A Figura 2 não é um polígono, pois, apesar de fechada sua linha poligonal é não simples e a Figura 3 não é um polígono, pois é uma linha poligonal simples e aberta.

A IDEIA DE ÁREA

A área é a medida da superfície da figura, ou seja, a quantidade de unidades que a figura ocupa no plano. E para comparar duas figuras e dizer qual delas tem a maior área, podemos utilizar uma unidade de área. Normalmente é um quadrado e a área da figura é a quantidade desses quadrados que cabem no interior da figura.

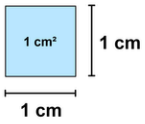


U
Unidade de medida de área: U

- A área da região A é 10 U.
- A área da região B é 9,5 U.
- A área da região C é 9 U.

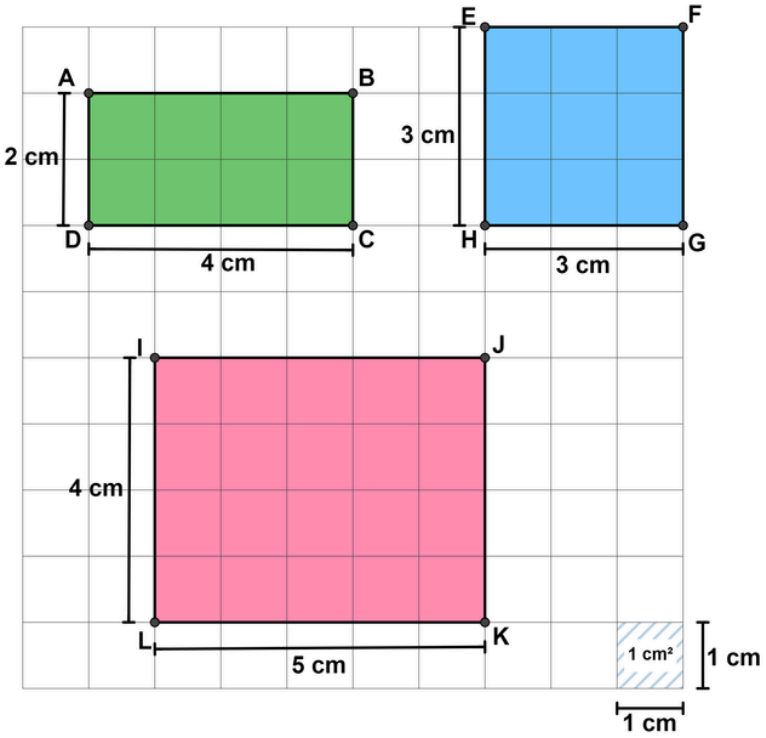
ÁREA DE FIGURAS PLANAS

A partir de agora, vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo comprimento do lado mede 1 cm. Ela será chamada região quadrada unitária.



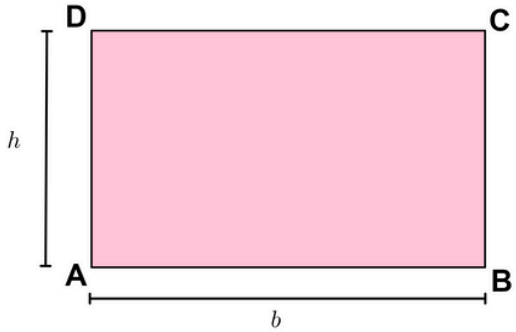
Retângulo e Quadrado

Observe os retângulos e o quadrado na malha quadriculada abaixo:



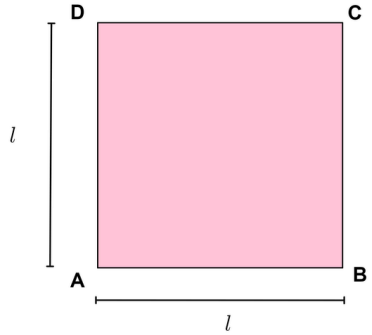
- A área do retângulo ABCD é igual a 8 cm² (4·2=8).
- A área do quadrado EFGH é igual a 9 cm² (3·3=3²=9).
- A área do retângulo IJKL é igual a 20 cm² (5·4=20).

A área de um retângulo de lados medindo b e h, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h.



$$A = b \cdot h$$

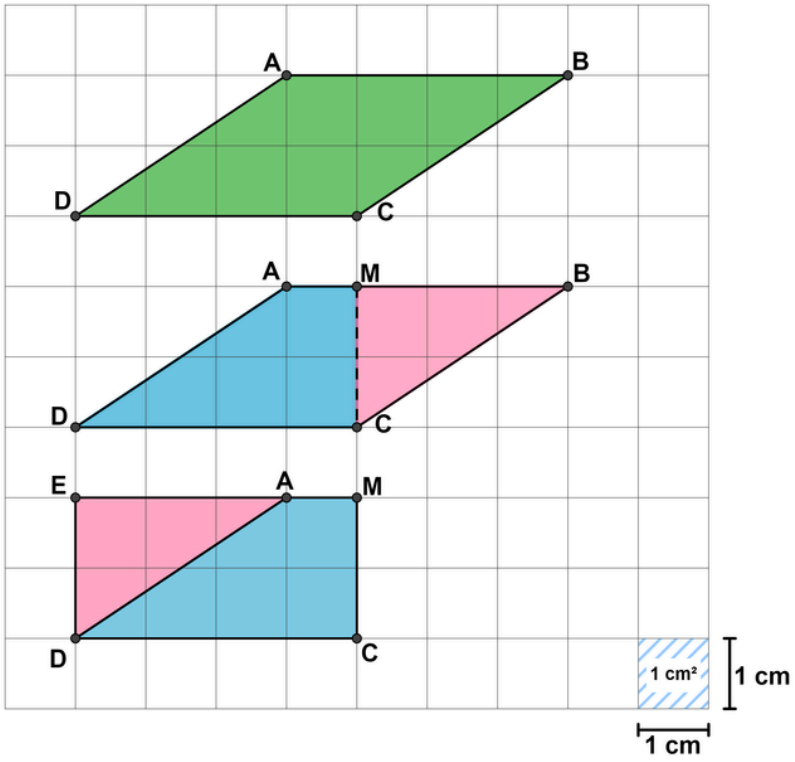
O quadrado é um caso especial do retângulo onde as medidas da base e da altura são iguais.



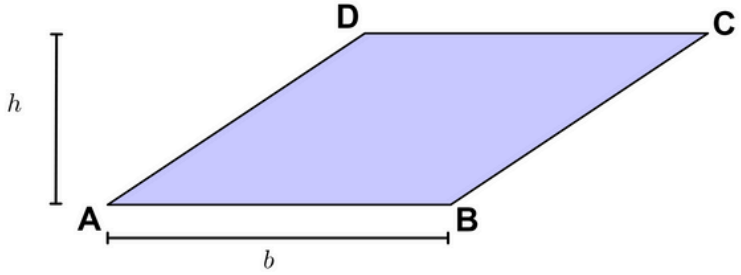
$$A = l^2$$

Paralelogramo

Na malha quadriculada ao lado, você pode acompanhar uma série de cortes e reorganização no paralelogramo ABCD, de modo que sua área seja equivalente à área do retângulo EMCD.



A área de um paralelogramo cuja base mede b e a altura mede h é igual à área de um retângulo de lados medindo b e h.



$$A = b \cdot h$$

Prezada Professora, Prezado Professor,

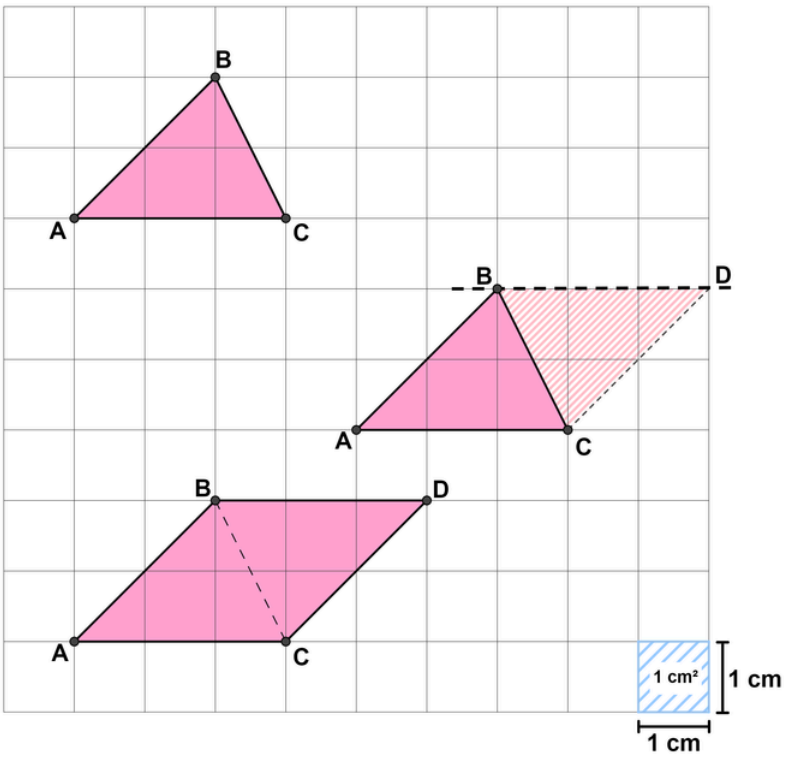
pensando em demonstrar, de forma visual, a relação de equivalência entre as áreas do paralelogramo e do retângulo, bem como a relação entre a área do triângulo e do paralelogramo, deixamos aqui dois links de aplicações do GeoGebra que fazem essa ligação:

paralelogramo

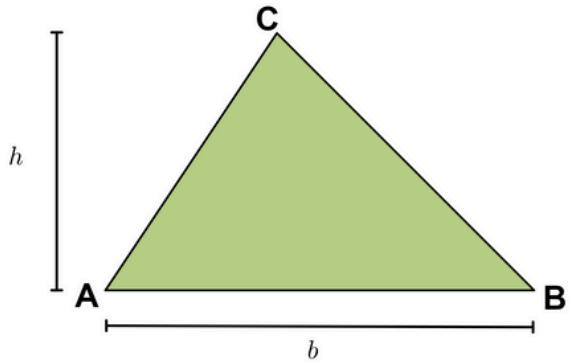
triângulo

Triângulo

Conhecendo a medida de área de uma região limitada por um paralelogramo, podemos determinar a medida de área de uma região triangular, porque toda região triangular é metade da região limitada por um paralelogramo de mesma medida de comprimento da base e da altura.
Observe na figura ao lado:



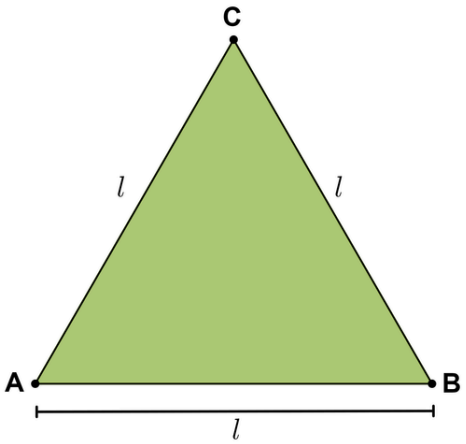
A medida de área de uma região triangular é igual à metade do produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura correspondente.

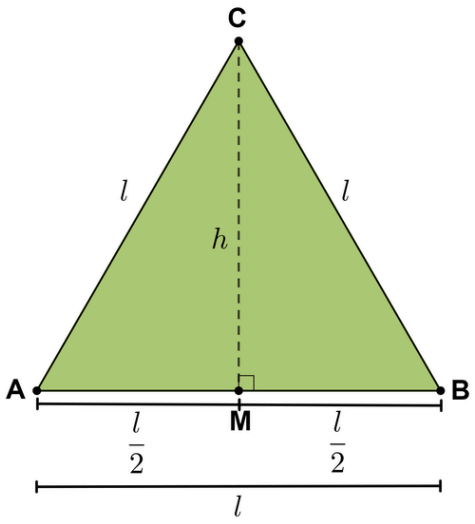


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero ao lado. A partir de C traçamos a altura relativa à base AB, assim definiremos um ponto M no lado AB. Note que essa altura também é mediana no triângulo equilátero. Assim, a medida AM é igual à medida MB, ou seja, seja metade do lado. Observe na figura da página seguinte.





Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo BMC, temos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3 \cdot l^2}{4}$$

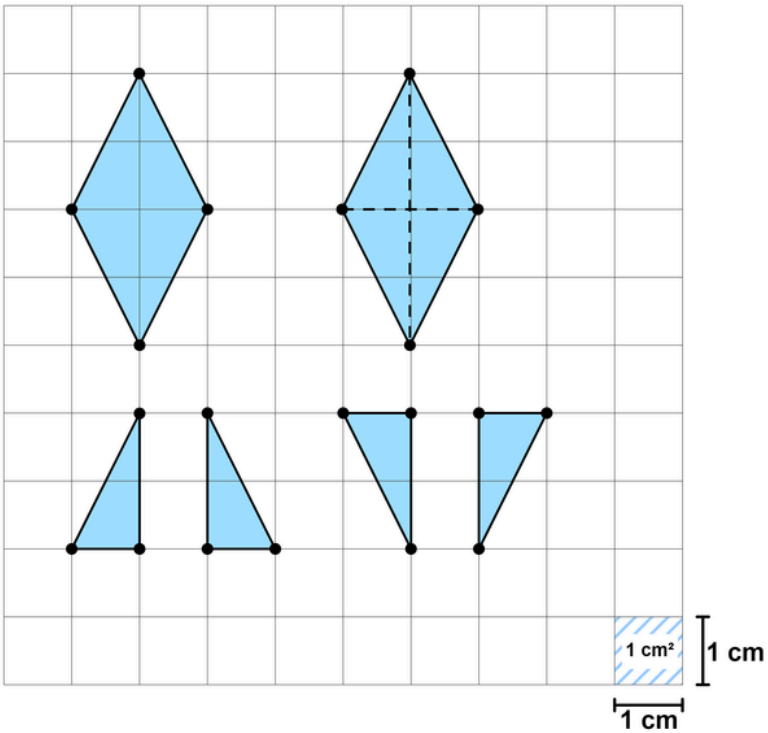
$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3 \cdot l^2}{4}} = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

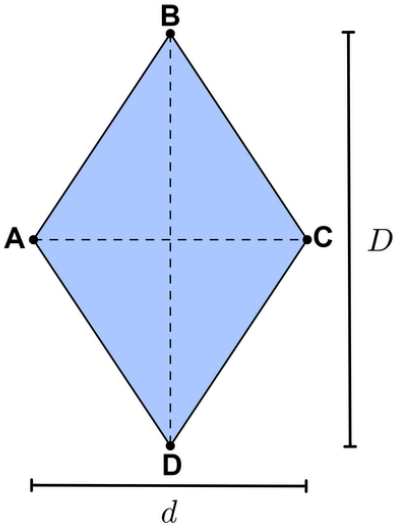
Assim, a área do triângulo equilátero ABC é

$$A = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Losango

Observe que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes de mesma área. Assim, sua área é a soma das áreas desses quatro triângulos.





Como os 4 triângulos são equivalentes, então

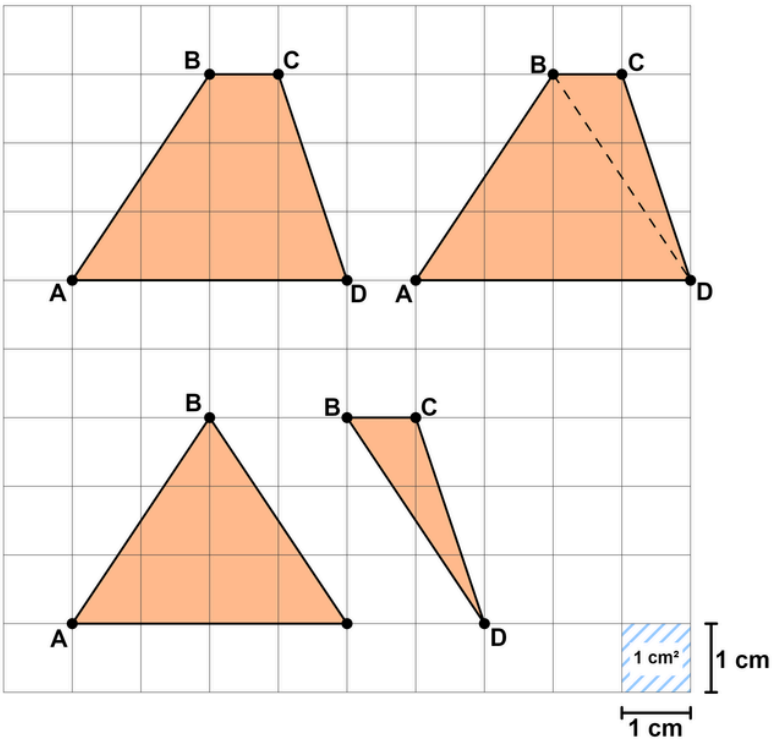
$$A = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}\right) = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2}.$$

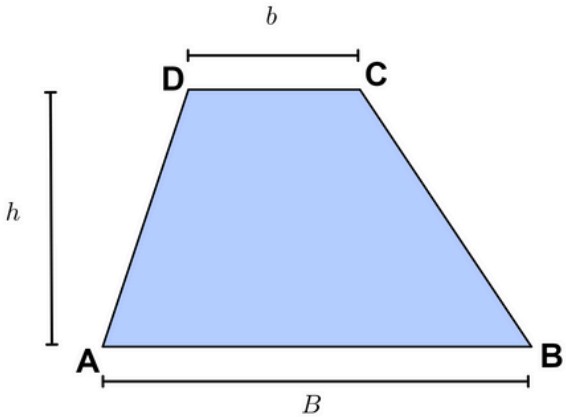
Portanto,

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Trapézio

Para determinar a medida da área de uma região limitada por um trapézio, vamos decompô-la em duas regiões menores traçando uma das diagonais do trapézio. Dessa forma, observamos que o trapézio é formado por dois triângulos de mesma altura, sendo um deles com a medida da base igual à medida da base maior do trapézio inicial e o outro com a medida da base igual à medida da base menor do trapézio.





Fazendo a divisão do trapézio em dois triângulos, obtemos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{h \cdot (B + b)}{2}.$$

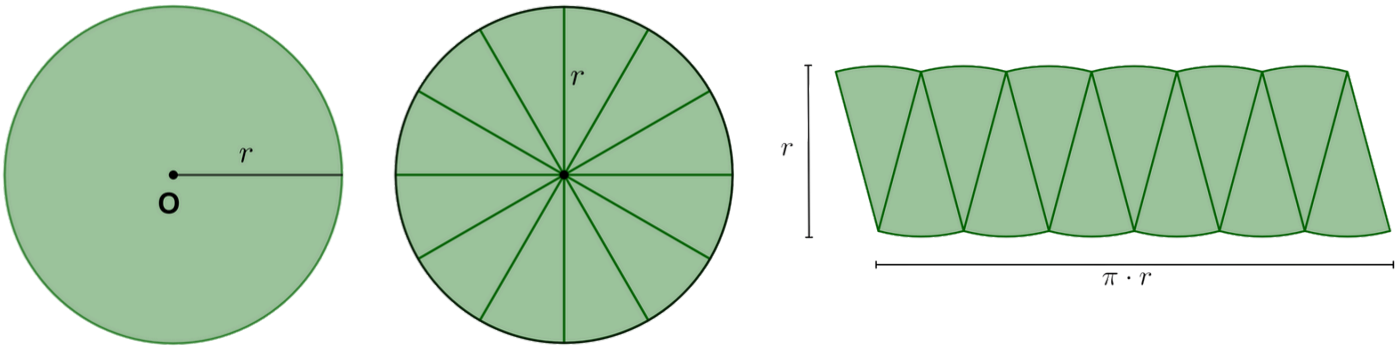
Assim,

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

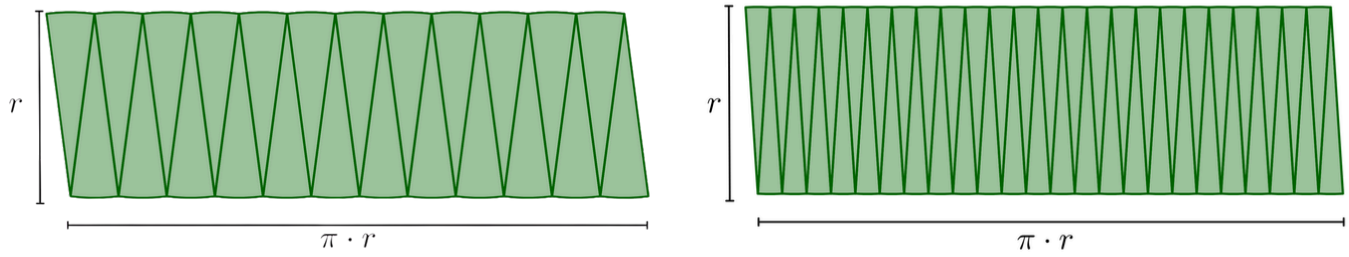
ÁREA DO CIRCULO E SUAS PARTES

Circulo

Considere um círculo de raio r e divida-o em um número par de partes iguais. Por exemplo, 12 partes iguais, como mostrado na sequência.
Podemos reorganizar essas partes e observar que a figura se assemelha a um paralelogramo.



A medida que aumentamos o número de partes em que dividimos o círculo, a figura reorganizada se aproximará de um paralelogramo cuja base possui medida igual a $\pi \cdot r$ e a altura igual a r. Veja abaixo a divisão em 24 e 48 partes, respectivamente.



Portanto, a área do círculo de raio r é:

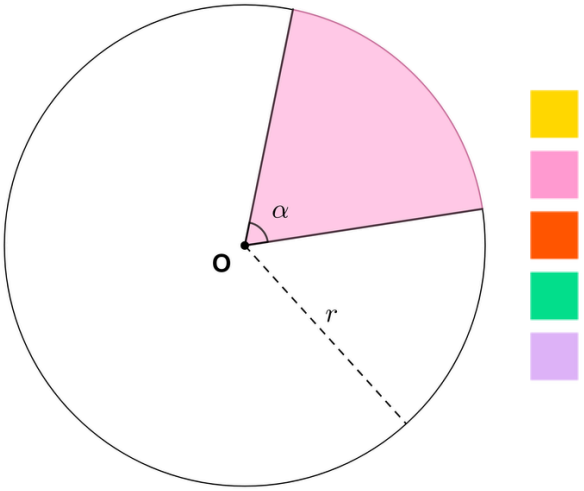
$$A = \pi \cdot r^2$$

Setor circular

Denominamos setor circular a região do círculo delimitada por um dos seus ângulos centrais.
A área do setor circular é proporcional ao ângulo que o determina, então podemos usar uma proporção para determinar sua área:

$$\frac{\pi r^2}{360^\circ} = \frac{S_\alpha}{\alpha}$$

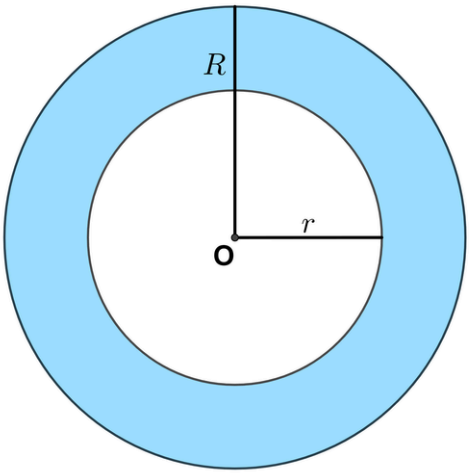
$$360^\circ \cdot S_\alpha = \alpha \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow S_\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360^\circ}$$



Coroa circular

A coroa circular é a região compreendida entre duas circunferências concêntricas que estão em um mesmo plano e tem medidas de seus raios diferentes.
A área de uma coroa circular é dada pela diferença das áreas dos círculos maior e menor:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right).$$



Prezada Professora, Prezado Professor,

para facilitar a visualização da demonstração intuitiva da área do círculo, a seguinte aplicação pode ser trabalhada em sala de aula.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Para produzir o efeito indicado pela figura 1 no revestimento de pisos, uma empresa fabrica placas quadradas com estampas geométricas, como as ilustradas na figura 2, onde as placas encontram-se desenhadas sobre uma malha quadriculada na qual cada quadradinho tem lado medindo 3 cm. A área, em cm², da figura 1 que se encontra colorida na cor preta, é:

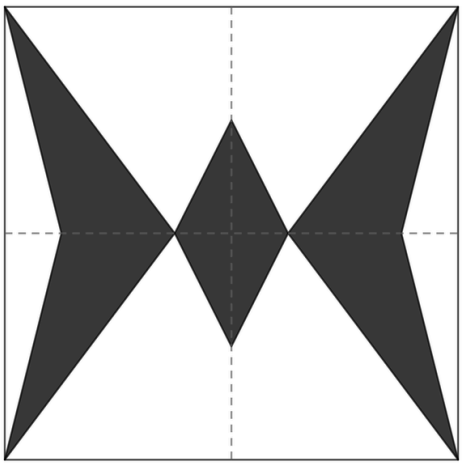


Figura 1

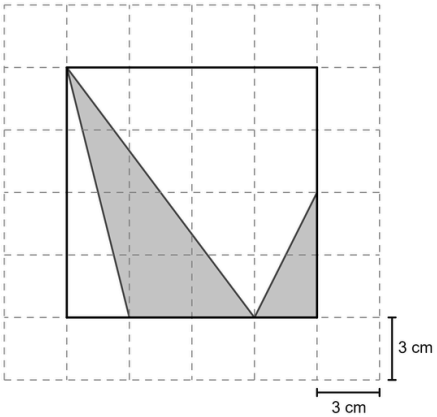
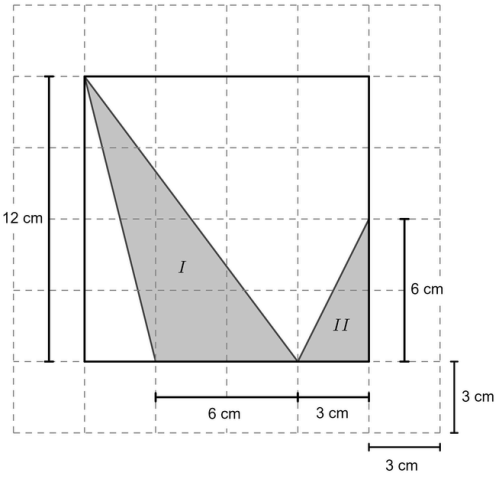


Figura 2

Solução. Note que a **Figura 1** é composta por quatro peças iguais à Figura 2, portanto, para determinar sua área basta que determinemos a área em cinza da **Figura 2** e, então, multipliquemos por 4.

Vamos agora, determinar a área em cinza da Figura 2, isto é, a soma das áreas dos triângulos I e II.



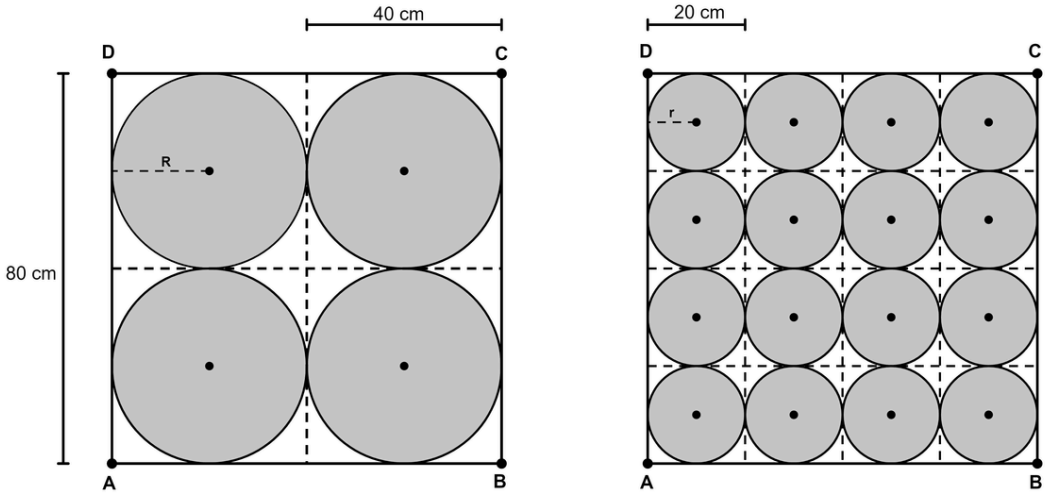
$$A_I = \frac{6 \cdot 12}{2} = 6 \cdot 6 = 36\ cm^2.$$

$$A_{II} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 3 \cdot 3 = 9\ cm^2.$$

Portanto, a área da figura 2 é $A_{\text{Figura 2}} = 36 + 9 = 45\ cm^2$.

Assim, a área em preto da figura 1 é $A_{\text{Figura 1}} = 4 \cdot 45 = 180\ cm^2$.

EXERCÍCIO 2. Na barraca de tiro ao alvo de João um participante pode escolher entre dois sistemas: o Alvo 1 e o Alvo 2, conforme a figura abaixo. Ambos são compostos por uma base de madeira quadrada de 80 cm de lado, a diferença entre eles é que no Alvo 1 o participante ganha o prêmio se acertar um dos 4 círculos (todos congruentes entre si), enquanto no Alvo 2 o participante ganha o prêmio se acertar um dos 16 círculos (todos congruentes entre si).



Marcelo ficou intrigado com a possibilidade de escolher um dos dois alvos e com base nas medidas apresentadas ele decidiu escolher o alvo em que a probabilidade dele ganhar o prêmio fosse maior. Qual foi a decisão de Marcelo?

Solução. Como todos os círculos no Alvo 1 e no Alvo 2 são congruentes entre si, é possível determinar, pelos valores mostrados na figura, que o raio dos círculos no alvo 1 é R= 20 cm e no Alvo 2 é r=10 cm. A área da placa de madeira é igual para os dois alvos e sua área é

$$A_{\text{Placa}} = 80^2 = 6\,400\ cm^2.$$

Marcelo deverá escolher o Alvo em que a região em cinza apresentar maior área. Para isso, vamos determinar a área em cinza de cada alvo:

$$A_{Alvo\ 1} = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 = 4 \cdot 400 \cdot \pi = 1\,600\pi\ cm^2.$$

$$A_{Alvo\ 2} = 16 \cdot \pi \cdot 10^2 = 16 \cdot 100 \cdot \pi = 1\,600\pi\ cm^2.$$

Portanto, Marcelo poderá escolher qualquer um dos dois alvos, pois, como as áreas em cinza de ambos são iguais e as áreas da tábua de madeira também são iguais, a probabilidade dele ganhar o prêmio em ambos os alvos é a mesma.

EXERCÍCIO 3. Em uma praça circular, um arquiteto planejou uma área para instalação de um gazebo (cobertura móvel). O jardim tem raio de 15 metros, e a área destinada ao gazebo ocupa um setor circular com ângulo central de 60º. O custo para se instalar o gazebo depende diretamente de sua área, sendo cobrado R$ 15,00 por m² a ser sombreada. Qual é o valor total necessário para fazer a instalação deste gazebo? (use π=3,14)

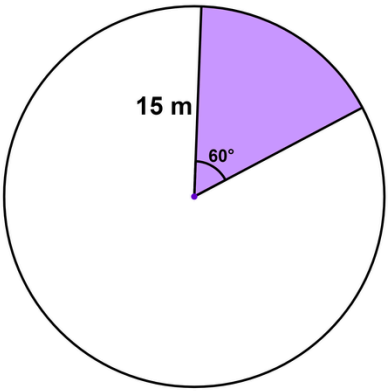
Solução. Primeiramente, devemos determinar a área do gazebo.

Podemos representar o gazebo do jardim como a região em roxo na ilustração ao lado, portanto, sua área é

$$A = \frac{60° \cdot \pi \cdot 15^2}{360°} = \frac{3,14 \cdot 225}{6} = \frac{706,5}{6} = 117,75\ m^2.$$

Como o custo para se sombrear 1m² é igual a R$ 15,00, temos que o custo total para se instalar o gazebo é

$$117,75\ m^2 \cdot R\$\ 15,00/m^2 = R\$\ 1766,25.$$



Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 5 (Geometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
- p. 10-26.
2. **Volume 2 (Geometria Plana e Espacial) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
- p. 8-61.

CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Para complementar a discussão sobre a relação entre o Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos sugerimos a aplicação no GeoGebra que pode ser acessada aqui ou pelo QR Code ao lado.

PORTAL DA MATEMÁTICA

O módulo 'Lei dos Senos e dos Cossenos' do Portal da Matemática apresenta vídeos, material teórico e caderno de exercícios sobre o tema e sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, que pode ser utilizado caso o professor considere necessário um momento de revisão.

O site pode ser acessado por aqui ou pelo QR Code ao lado.

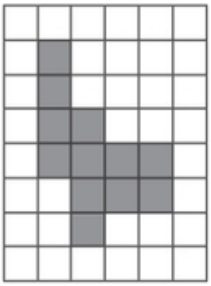
SUGESTÃO DE PRÁTICA

No Volume 2 (Geometria Plana e Espacial) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática), nas páginas 37 e 38, é sugerida uma prática, no GeoGebra, intitulada "Cálculo aproximado da medida de área de regiões poligonais".
Esta prática, juntamente com a questão 33 (p. 39) do mesmo livro didático, e com a sessão "Desmatamento na Amazônia" (p. 42-43) fornecem um material para trabalhar as questões ambientais com o conteúdo discutido neste material.

Atividades

ATIVIDADE 1

(Enem 2011) Na zona rural, a utilização de unidades de medida como o hectare é bastante comum. O hectare equivale à área de um quadrado de lado igual a 100 metros. Na figura, há a representação de um terreno por meio da área em destaque. Nessa figura, cada quadrado que compõe a malha representa uma área de 1 hectare.



O terreno em destaque foi comercializado pelo valor R$ 3 600 000,00. O valor do metro quadrado desse terreno foi de

A) R$ 30,00
B) R$ 300,00
C) R$ 360,00
D) R$ 3 600,00
E) R$ 300 000,00

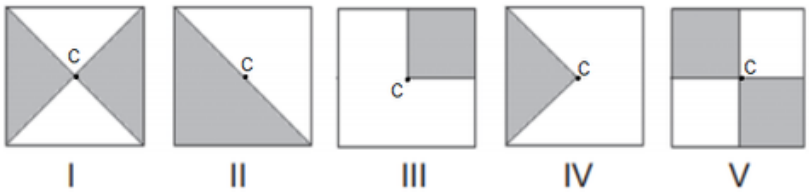
ATIVIDADE 2

Um fazendeiro possui um sistema de irrigação circular para sua plantação de alface. A área irrigada por esse sistema é de 78,5 m². Ele precisa construir uma cerca quadrada ao redor da área irrigada para proteger a plantação de animais, mantendo a cerca o mais próximo possível da plantação. Qual é a medida da área delimitada pela cerca que o fazendeiro precisa construir? (Utilize: π = 3,14)

A) 50 m²
B) 78,5 m²
C) 100 m²
D) 125 m²
E) 150 m²

ATIVIDADE 3

(Enem 2011 - Adaptada) Numa sementeira, cinco canteiros quadrados serão preparados para plantar, em cada um, dois tipos de sementes: A e B. Os canteiros estão representados segundo as figuras:



Obs.: o ponto C representa o centro do canteiro

Suponha que cada canteiro tem 1 m² de área e que nas regiões sombreadas de cada canteiro serão plantadas as sementes do tipo A. Qual o total da área, em m², reservada para as sementes do tipo B?

A) 1,25
B) 2
C) 2,5
D) 3
E) 5

ATIVIDADE 4

Para a comemoração de 10 anos de funcionamento, um comerciante de uma loja de aquários decidiu fazer a pintura de uma parede lateral de sua loja. Ela possui 6 metros de largura e 10 metros de altura. Além disso, na parede existem duas janelas com dimensões de 80 cm por 1 m, duas janelas com dimensões de 50 cm por 1,10 m e uma porta com dimensões 80 cm por 2,10 m.

Para a pintura ele comprou apenas latas de tinta na cor branca e utilizou corantes que já havia comprado por R$ 123,45. Sabendo que cada lata de tinta custa R$ 45,30 e que o rendimento de cada lata é de 18 m², responda:

A) No mínimo quantas latas de tinta foram necessárias para a pintura de toda a parede?

B) Qual o total gasto na compra das latas de tintas?

C) Qual o valor total gasto na pintura?

Fotografia: Erik Mclean
Public Domain

ATIVIDADE 5

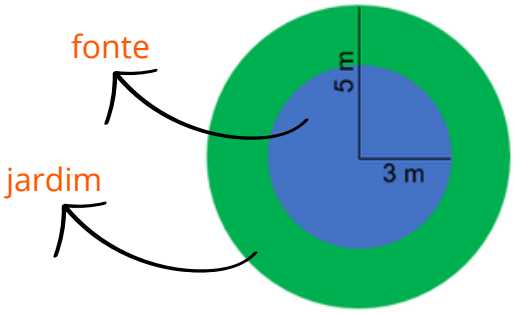
A prefeitura de Jerônimo Monteiro, no interior do Espírito Santo, está organizando uma festa para comemorar o aniversário da cidade no parque municipal. O parque tem um formato retangular, com dimensões de 180 metros de comprimento por 200 metros de largura. Para garantir a segurança de todos os participantes, o Corpo de Bombeiros recomenda que a densidade média em eventos desse tipo não exceda cinco pessoas por metro quadrado.

Com base nas recomendações de segurança, qual é o número máximo de pessoas que podem participar da festa?

A) 40 000
B) 90 000
C) 180 000
D) 360 000
E) 720 000

ATIVIDADE 6

Um jardineiro está projetando um jardim circular com uma fonte no centro. O jardim tem um raio de 5 metros e a fonte tem um raio de 3 metros.



Qual é a área da coroa circular formada entre a borda do jardim e a fonte?
(Utilize: π = 3,14)

A) 21,98 m²
B) 28,26 m²
C) 50,24 m²
D) 54,32 m²
E) 106,76 m²

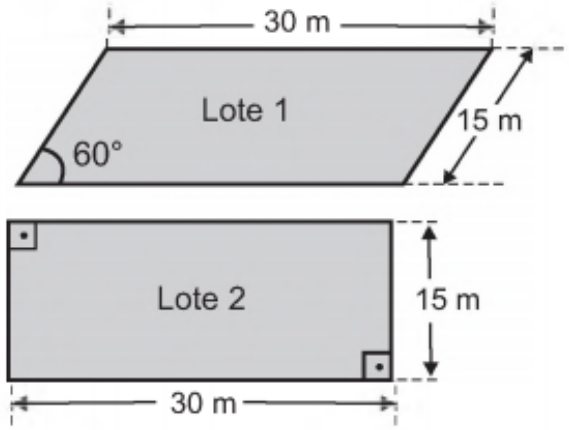
ATIVIDADE 7

Você tem uma corda de 24 metros e quer construir dois padrões geométricos diferentes usando essa corda. Primeiro, você cria um quadrado. Depois, com a mesma corda, você constrói um retângulo, cuja base corresponde a $\frac{2}{4}$ da altura.

Qual é a razão entre as áreas do retângulo e do quadrado?

ATIVIDADE 8

(Enem 2016 - adaptada) Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa, que essa família tem em mente, irão necessitar de uma área de pelo menos 400 m². Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são R$ 100 000,00 e R$ 150 000,00, respectivamente.



sen 60º = 0,87
cos 60º = 0,5
tg 60º = 1,73

Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

Pai: Devemos comprar o Lote 1, pois como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

Mãe: Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto, pois tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

Filho 1: Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

Filho 2: Devemos comprar o Lote 1, pois como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

Corretor: Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

Qual foi a pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno?

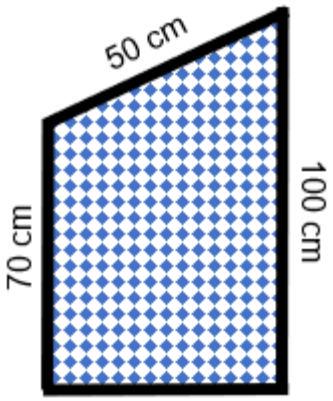
ATIVIDADE 9

Dona Maria, com o sonho de ter um belo jardim retangular em seu quintal, dispõe de 40 metros de tela para cercá-lo. Sua paixão por jardinagem e o desejo de otimizar o espaço disponível a levam a questionar:

Qual é a maior área possível, utilizando os 40 metros de tela disponíveis?

ATIVIDADE 10

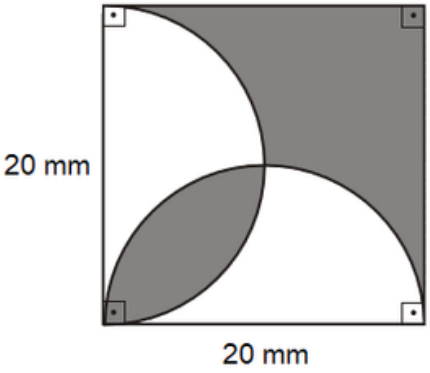
A bela Igreja Matriz de São José, localizada em Baixo Guandu, município do Espírito Santo, está passando por uma reforma e terá um vitral novo, com o formato de um trapézio retângulo, cujas medidas estão representadas na imagem seguinte.



Qual é a medida da área desse vitral?

DESAFIO

Determine a área da região sombreada na figura abaixo.



Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: geometria plana e espacial. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DOCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 9:** geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2011 - Exame Nacional do Ensino Médio 2011:** 2º dia. Brasília: INEP, 2011. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia1_caderno2_amarelo.pdf. Acesso em: 20 fev. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2016 - Exame Nacional do Ensino Médio 2016:** 2º dia. Brasília: INEP, 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 20 fev. 2025.