



**GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO**
Secretaria da Educação

Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO EXPONENCIAL: ANÁLISE GRÁFICA E FUNÇÃO DO TIPO EXPONENCIAL

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRIPTOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	• Construir e interpretar gráficos de funções exponenciais. • Analisar o crescimento ou decrescimento exponencial no gráfico, compreendendo como mudanças nos parâmetros da função (como a base) impactam a curva.	D074_M Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial.

Contextualização

A função exponencial é fundamental para compreender o comportamento de diversos fenômenos que crescem ou diminuem de maneira rápida e significativa. Uma das maneiras mais eficazes de estudar essas funções é por meio da **análise gráfica**, que nos permite visualizar como elas se comportam ao longo do tempo. O gráfico de uma função exponencial tem características únicas, como a presença de uma **assíntota horizontal**, que indica que a função nunca toca o eixo x , mas se aproxima infinitamente dele. Além disso, dependendo da base da função, o gráfico pode representar um **crescimento exponencial** (quando a base é maior que 1) ou um **decréscimo exponencial** (quando a base é entre 0 e 1).

No cotidiano, funções exponenciais são observadas em situações como o **crescimento populacional**, onde o número de indivíduos aumenta de forma acelerada, ou em **juros compostos**, nos quais o valor do dinheiro cresce exponencialmente ao longo do tempo. Outro exemplo são as **epidemias**, em que a propagação de doenças pode ocorrer de maneira exponencial, com a taxa de infecção aumentando rapidamente. Todos esses fenômenos podem ser representados graficamente por uma função exponencial, o que ajuda a visualizar como o valor de uma grandeza pode mudar de forma rápida e imprevisível.

Estudar a **representação gráfica** de funções exponenciais é essencial para entender esses processos, pois permite visualizar o impacto de mudanças em diferentes contextos, como saúde, economia e biologia. Além disso, ao desenhar os gráficos dessas funções, podemos perceber de forma mais clara a aceleração dos fenômenos, ajudando a prever comportamentos futuros e a tomar decisões mais informadas. Assim, o estudo gráfico das funções exponenciais não só amplia a compreensão matemática, mas também proporciona uma visão mais concreta dos processos que moldam nosso mundo.

Conceitos e Conteúdos

ANÁLISE GRÁFICA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Introdução

Nesta segunda parte do estudo de funções exponenciais, exploraremos a construção e a análise de seus gráficos. Vamos observar as características importantes se manifestam em qualquer função exponencial e como os parâmetros influenciam seu comportamento. **Nosso objetivo neste material é entender essas funções de maneira prática e visual.**

Vejamos na figura 1 alguns exemplos de gráficos de funções crescentes e decrescentes.

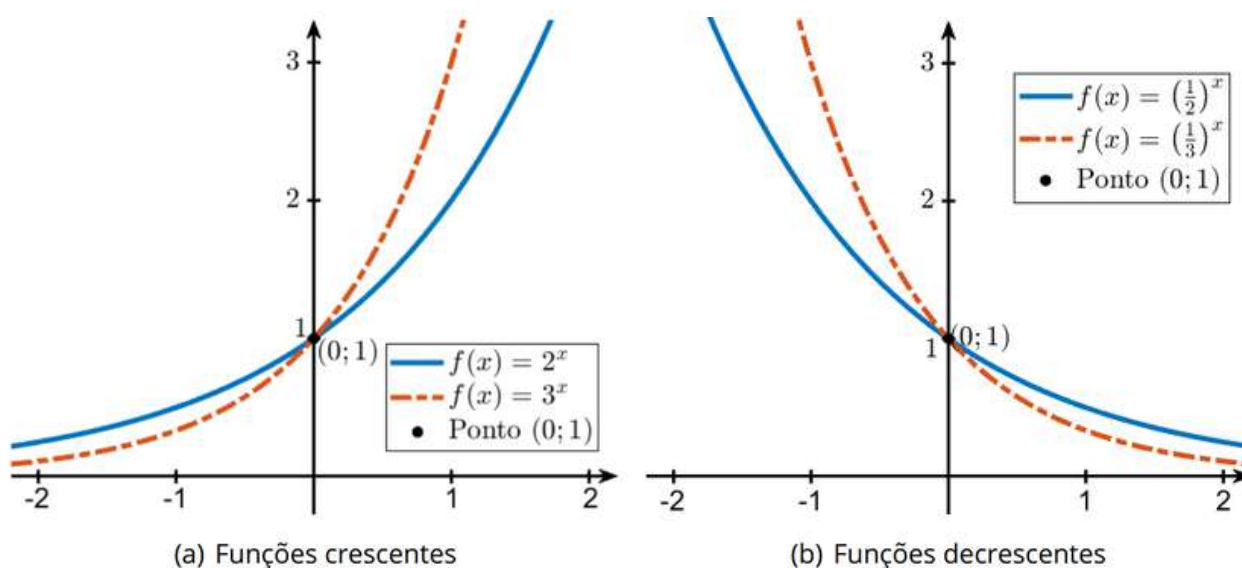


Figura 1: Gráficos de funções exponenciais com diferentes bases.

Sempre que sentir necessidade, recorra à figura 1 para constatar as características elencadas nos próximos tópicos.

CARACTERÍSTICAS COMUNS A TODA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vejamos algumas características válidas para qualquer função exponencial.

Domínio e imagem

- **Domínio:** As funções exponenciais estão definidas para qualquer número real ($x \in \mathbb{R}$).
- **Imagem:** O valor de $f(x)$ é sempre positivo. Isto quer dizer que o **gráfico nunca toca ou cruza o eixo x**.

Curvatura do gráfico

O gráfico de uma função exponencial, se destaca por crescer ou decrescer de forma acelerada, indicando uma curva que nunca muda de direção.

Valor da função em $x = 0$

Toda função na forma $f(x) = a^x$ possui o **ponto em comum** (0,1), pois

$$f(0) = a^0 = 1$$

Isso significa que em toda função $f(x) = a^x$ ou seja, em que **a** é um número real positivo e diferente de 1, o gráfico da função exponencial sempre passa pelo ponto (0,1). Esse ponto é essencial para esboçar esse tipo de gráfico.



Um exemplo de função exponencial decrescente é o decaimento de substâncias radioativas, onde a quantidade da substância diminui a uma taxa constante ao longo do tempo. Esse comportamento é visualizado graficamente por uma curva que começa com um valor alto e diminui progressivamente até se aproximar de zero, mas **nunca** chega a ele.



DIFERENÇAS ENTRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS CRESCENTES E DECRESCENTES

Além das características em comum de toda função exponencial, temos as particularidades para os casos das funções exponenciais crescentes ou decrescentes. Vejamos agora as principais diferenças entre elas.

Análise assintótica

A análise do comportamento assintótico nos ajuda a entender como a função se comporta quando x assume valores muito grandes ($x \rightarrow +\infty$) ou muito pequenos ($x \rightarrow -\infty$).

- **Função crescente:**

- Conforme x decresce, $f(x)$ se aproxima de 0, mas nunca o alcança.
- Conforme x cresce, $f(x)$ cresce cada vez mais acentuadamente.

- **Função decrescente:**

- Conforme x decresce, $f(x)$ cresce cada vez mais acentuadamente.
- Conforme x cresce, $f(x)$ se aproxima de 0, mas nunca o alcança.

Estritamente crescente ou decrescente

A função exponencial é injetora, ou seja, para quaisquer dois valores diferentes de x_1 e x_2 , os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ também serão diferentes. Dessa forma, temos as seguintes diferenciações.

- **Função crescente:**

- Se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
- Conforme x aumenta, $f(x)$ também aumenta continuamente.

- **Função decrescente:**

- Se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.
- Conforme x aumenta, $f(x)$ diminui continuamente.



Velocidade de crescimento ou decaimento

A velocidade com que a função cresce ou decai depende do valor da base a , diferenciando-se da seguinte maneira.

- **Função crescente:** quanto maior a base, mais rápido o crescimento da função. Por exemplo, $f(x) = 3^x$ cresce mais rapidamente que $f(x) = 2^x$.
- **Função decrescente:** quanto menor a base, mais rápido o decaimento. Por exemplo, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ decresce mais rapidamente que $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ou seja, base a controla a velocidade de crescimento ou decaimento.

FUNÇÃO DO TIPO EXPONENCIAL

O crescimento ou decrescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais e de algumas situações do cotidiano. No entanto, de modo geral, não se apresenta na forma $f(x) = a^x$ (com $a > 1$ e $a \neq 0$), mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em $f(x) = b \cdot a^{k \cdot x}$ com $b, k \in \mathbb{R}^*$. Dizemos que essa função é **do tipo exponencial**, e o gráfico dela em um plano cartesiano também é uma curva exponencial.

Podemos definir a forma geral de uma função do tipo exponencial do seguinte modo:

$$f(x) = b \cdot a^{k \cdot x + c} + d$$

Em que cada um dos coeficientes a , b , c , d e k influenciam no gráfico da função do tipo exponencial como descrito a seguir.

- a : Base da potência; determina o comportamento crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$).
- b : Controla o alongamento ou compressão vertical.
- c : Desloca o gráfico horizontalmente ($c > 0$ para a esquerda, $c < 0$ para a direita).
- d : Desloca o gráfico verticalmente ($d > 0$ para cima, $d < 0$ para baixo).
- k : Altera a inclinação, mudando a taxa de crescimento ou decaimento.

Podemos observar na figura 2 exemplos ilustrativos das transformações aplicadas ao gráfico da função $f(x) = 2^x$. Essas alterações, que destacam a influência de diferentes parâmetros na forma do gráfico, podem ser exploradas de maneira interativa utilizando ferramentas como o GeoGebra.

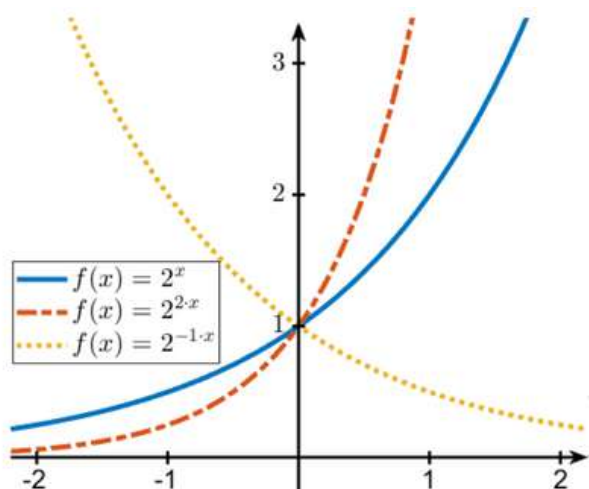
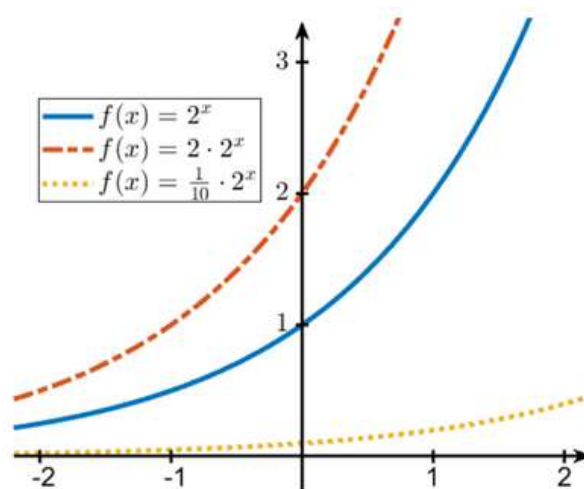
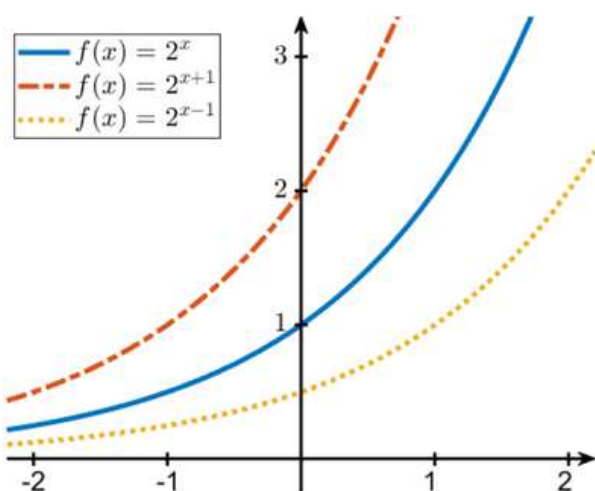
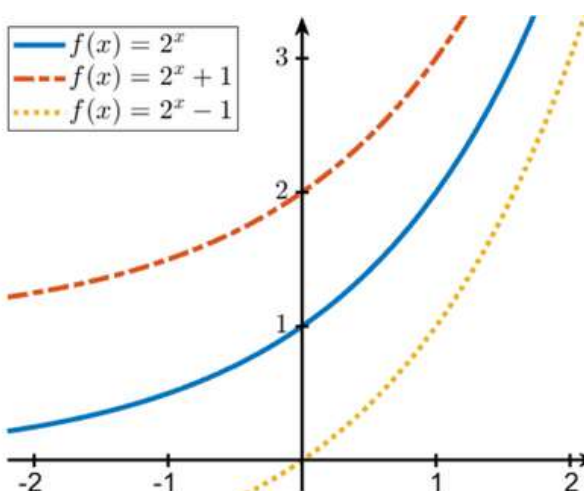
(a) Variação no coeficiente k .(b) Variação no coeficiente b .(c) Variação no coeficiente c .(d) Variação no coeficiente d .

Figura 2: Influência dos coeficientes nas funções do tipo exponencial.



O número e (aproximadamente 2,718) é uma base muito importante em funções exponenciais, especialmente em fenômenos naturais. Funções do tipo $f(x) = e^x$ aparecem em diversos contextos, como no **crescimento populacional** ou em **modelos de juros compostos contínuos**. O gráfico da função $f(x) = e^x$ é a curva mais suave e natural de crescimento exponencial, sendo amplamente usada para modelar fenômenos em que o crescimento é proporcional ao valor atual, como no caso da biologia celular ou até da economia.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Esboce os gráficos de $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Quais diferenças você observa?

Resolução

Inicialmente, vamos calcular os valores das funções para alguns valores de x . Sabemos que para $x = 0$, todas as funções exponenciais têm como resultado $f(0) = 1$, já que $a^0 = 1$ para qualquer base $a > 0$.

Os cálculos para $x = -2, -1, 1$ e 2 estão apresentados na tabela 1.

x	$f(x) = 2^x$	$f(x) = 3^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
1	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Tabela 1: Valores das funções exponenciais para diferentes valores de x .

Com esses valores, podemos esboçar os gráficos, como mostrado na figura 3.

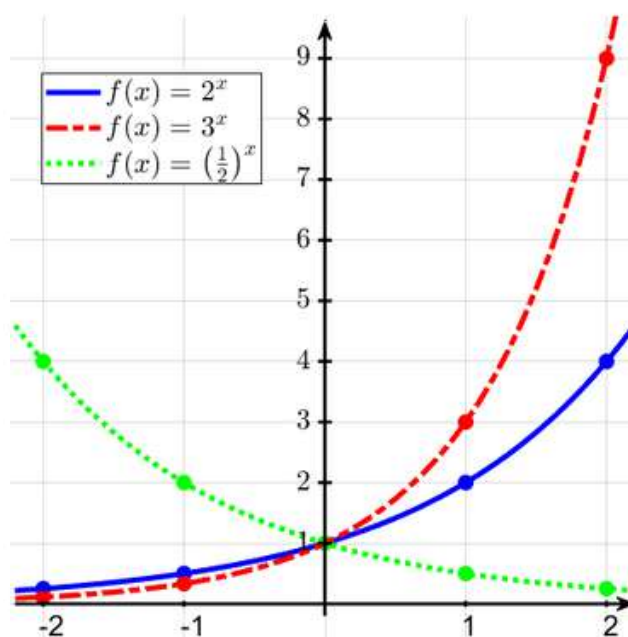


Figura 3: Gráficos de funções exponenciais do exercício resolvido 1.

Análise dos gráficos:

- As funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$ são **crescentes**, porque as bases 2 e 3 são maiores que 1. Percebemos que a função com a base maior (3^x) cresce mais rápido.
- A função $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ é **decrescente**, porque a base ($\frac{1}{2}$) está entre 0 e 1.

Além disso, todas as funções passam pelo ponto (0, 1), que é característico de funções exponenciais.

Para valores muito grandes e pequenos de x , temos que:

- Quando $x \rightarrow -\infty$, as funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$ se aproximam de 0.
- Para $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, conforme $x \rightarrow -\infty$, os valores crescem rapidamente.



EXERCÍCIO 2

Construa o gráfico de $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$. Quais transformações ocorreram se compararmos ao gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$?

Resolução

Vamos calcular os valores de $f(x)$ para alguns valores de x , a fim de facilitar a construção do gráfico e a análise das transformações.

- Para $x = -2$:

$$f(-2) = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2} - 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{12} - 2 = -\frac{23}{12} \approx -1,92$$

- Para $x = -1$:

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot 2^{-1} - 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{6} - 2 = -\frac{11}{6} \approx -1,83$$

- Para $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 2^0 - 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} \approx -1,67$$

- Para $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 2^1 - 2 = \frac{1}{3} \cdot 2 - 2 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3} \approx -1,33$$

- Para $x = 2$:

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^2 - 2 = \frac{1}{3} \cdot 4 - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3} \approx -0,67$$



Com esses valores, podemos esboçar o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$, como mostrado na figura 4.

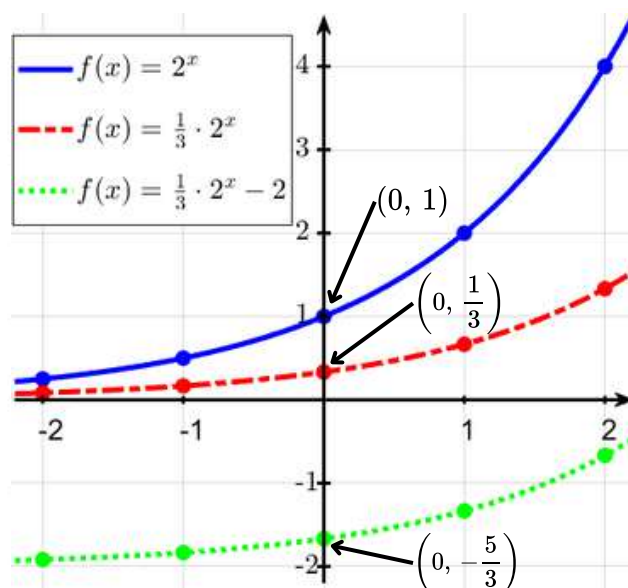


Figura 4: Etapas da transformação $f(x) = 2^x \rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x \rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$.

Análise das transformações: A função $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$ é obtida a partir de $f(x) = 2^x$ aplicando as seguintes transformações:

1. Inicialmente, ocorre um **achatamento vertical** com fator $\frac{1}{3}$, que reduz a inclinação do gráfico em relação ao eixo y . Além disso, o ponto em que o gráfico cruza o eixo y muda de $(0, 1)$ para $(0, \frac{1}{3})$.
2. Após o achatamento, ocorre uma **translação vertical** de 2 unidades para baixo, devido ao termo -2 . Assim, o gráfico mantém a mesma inclinação da primeira parte da transformação, porém o ponto em que o gráfico cruza o eixo y muda de $(0, \frac{1}{3})$ para $(0, -\frac{5}{3})$.

Essas transformações fazem com que o gráfico fique menos inclinado e deslocado para baixo, mas ele mantém o comportamento assintótico característico da função exponencial $f(x) = 2^x$.



Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 1: Função exponencial.

- A função exponencial. (p. 34 - 65)



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.

- Função exponencial. (p. 64 - 65)

EXPLORANDO O GEOGEBRA



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.

- A base da potenciação e gráfico da função exponencial. (p. 70 - 71)





Atividades

ATIVIDADE 1

Seja f uma função exponencial definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, cuja lei de formação é $f(x) = 5^x$. Para cada item faça o que se pede:

- Calcule o valor de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.
- Com base nos valores de x e y obtidos nos itens anteriores, organize os pares ordenados (x, y) e construa o gráfico da função $f(x)$ em seu caderno.
- Com base no gráfico do item b, que representa uma função exponencial, analise o comportamento dos valores de $f(x)$ à medida que x aumenta.

ATIVIDADE 2

Seja f uma função exponencial definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, cuja lei de formação é $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Para cada item faça o que se pede:

- Calcule o valor de $f(-1)$, $f(0)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(1)$.
- Com base nos valores de x e y obtidos nos itens anteriores, organize os pares ordenados (x, y) e construa o gráfico da função $f(x)$ em seu caderno.
- Com base no gráfico do item b, que representa uma função exponencial, analise o comportamento dos valores de $f(x)$ à medida que x aumenta.

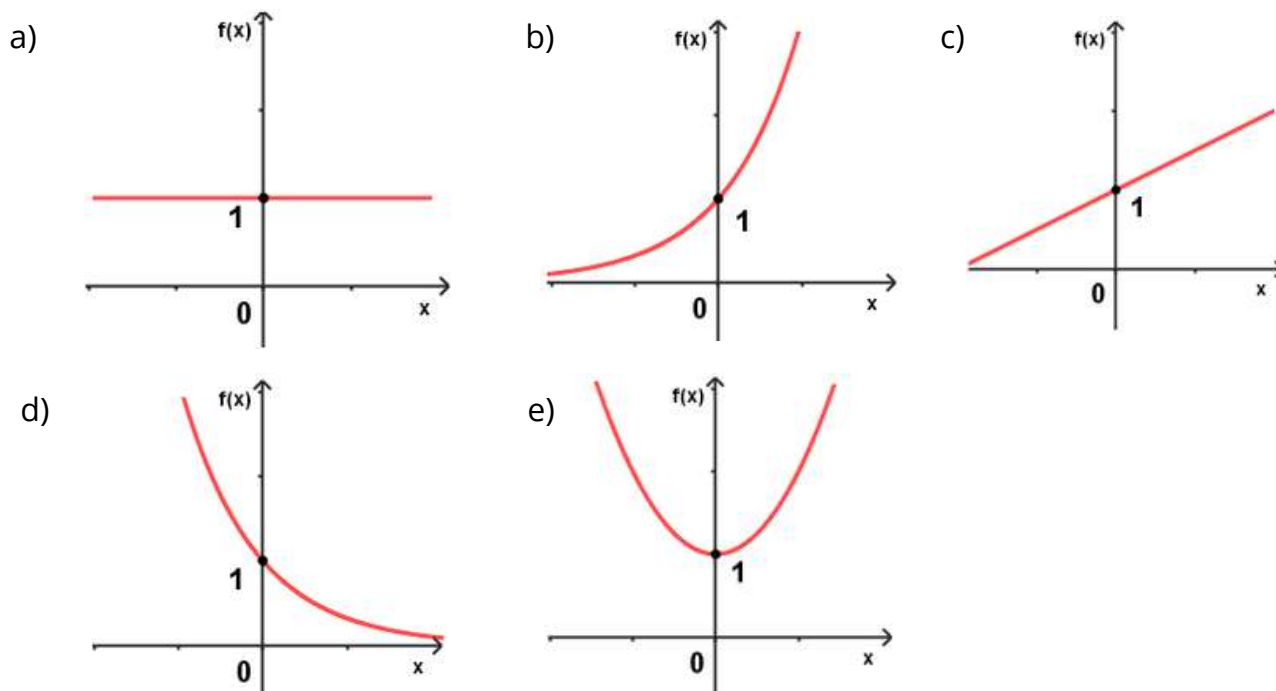
ATIVIDADE 3

Seja uma função exponencial, cuja lei de formação é $f(x) = a^x$, e cujo gráfico é uma curva crescente. Um possível valor para a é:

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

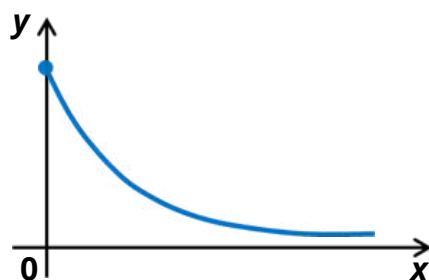
ATIVIDADE 4

A função f , tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico:



ATIVIDADE 5

A radioatividade é a propriedade que algumas substâncias tem de emitir radiações. Observe o gráfico da função f , sendo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, que representa a radioatividade y de determinado minério em função do tempo x .



Agora, responda as questões:

- A radioatividade está aumentando ou diminuindo? Por quê?
- Esse minério deixará de ser radioativo em algum momento? Por quê?
- Quais são os possíveis valores de a ?



ATIVIDADE 6

Considere uma função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, cujo gráfico é dado a seguir.

A lei que define essa função é dada por:

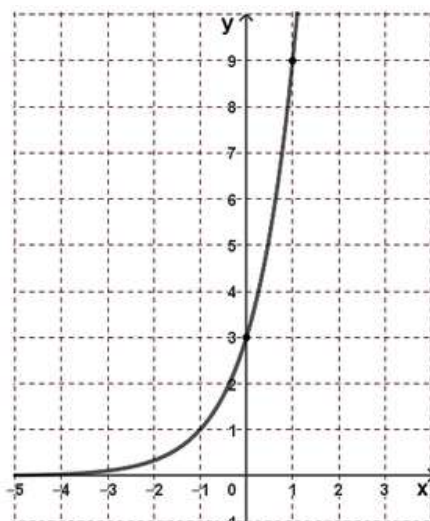
a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 9^x$

c) $f(x) = 3^{x+1}$

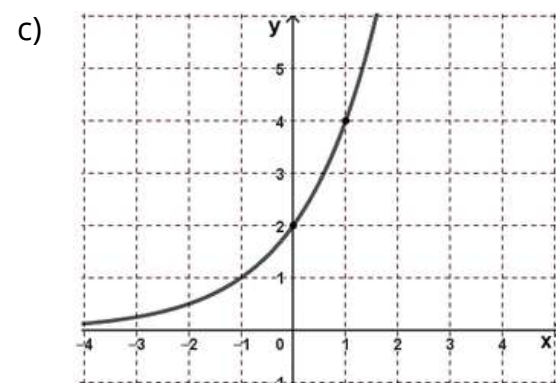
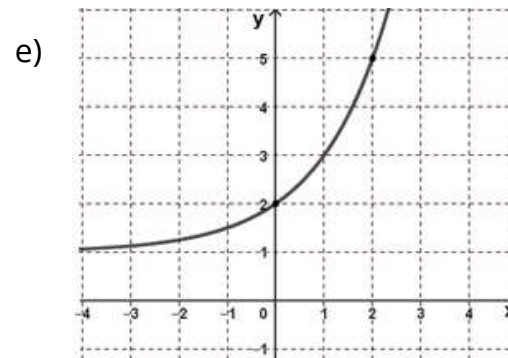
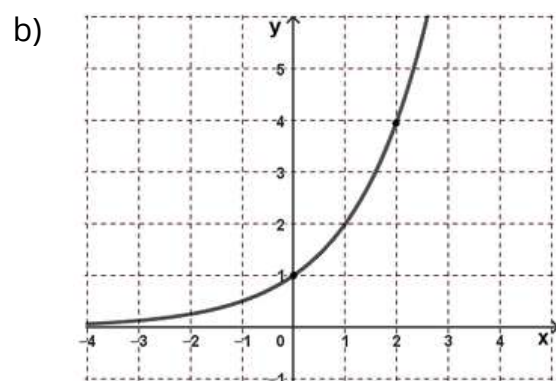
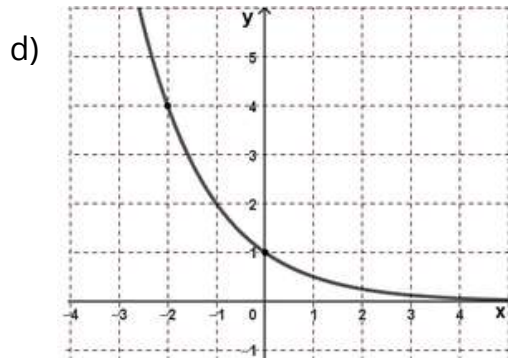
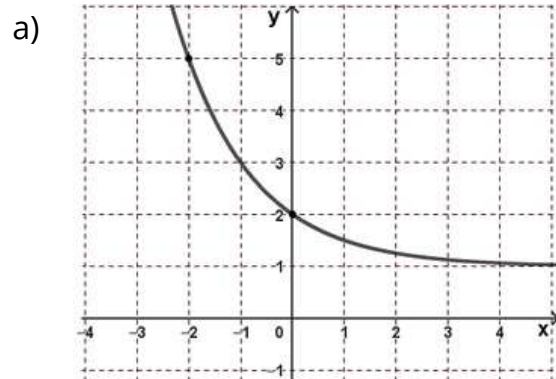
d) $f(x) = 3^x + 2$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$



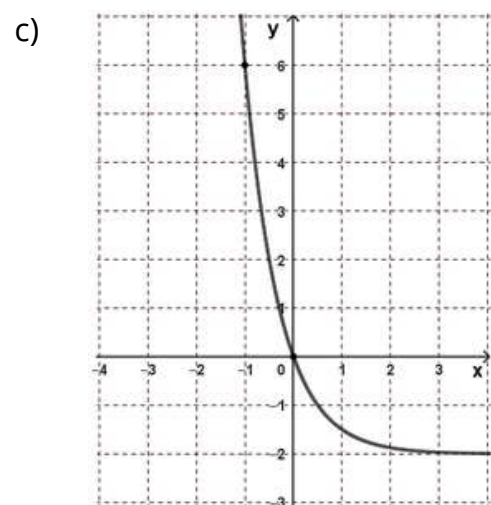
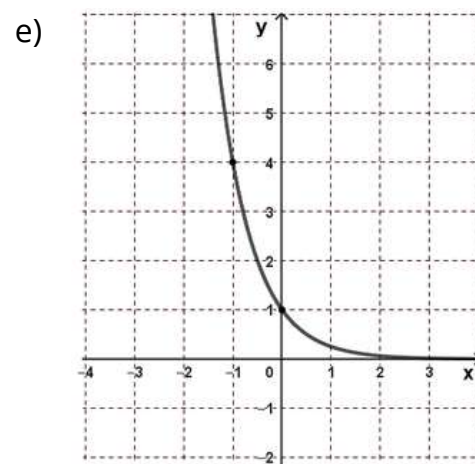
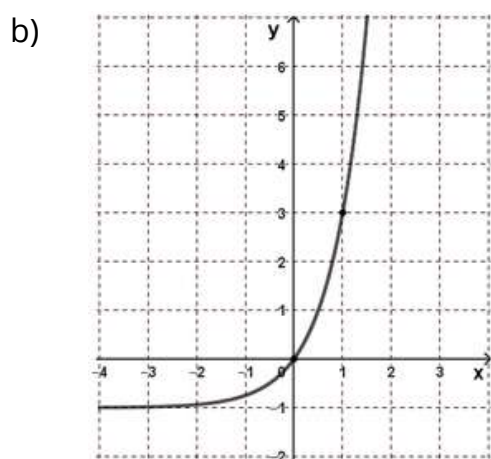
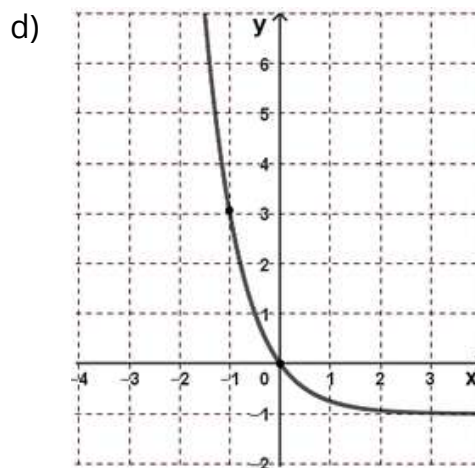
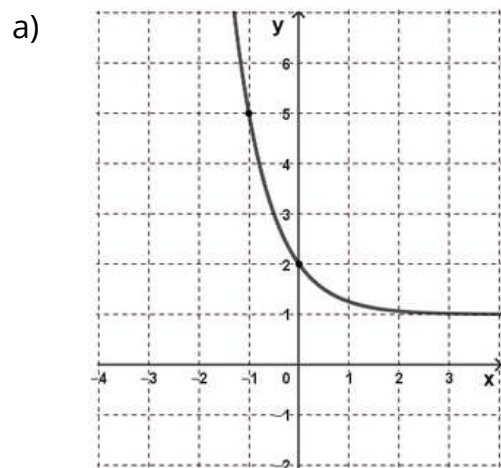
ATIVIDADE 7

O gráfico que representa a função exponencial definida por $f(x) = 2^x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$, é:



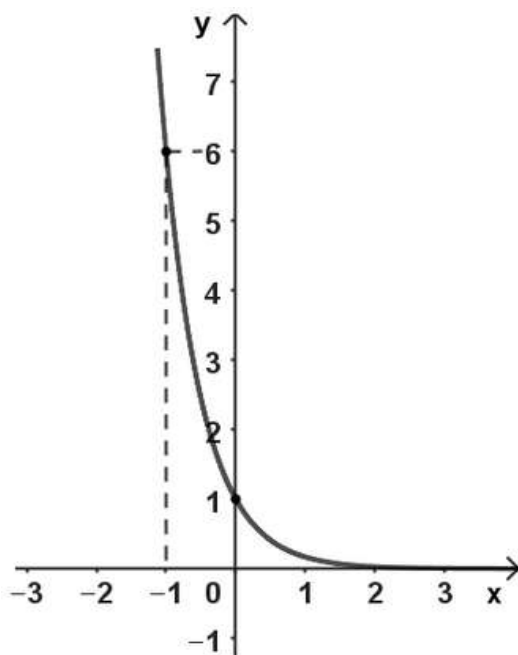
ATIVIDADE 8

Considere a função de domínio real dada por $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$. O gráfico que representa essa função é:



ATIVIDADE 9

(SAEPE - PE) Observe o gráfico de uma função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$



A lei de formação dessa função é dada por:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}$

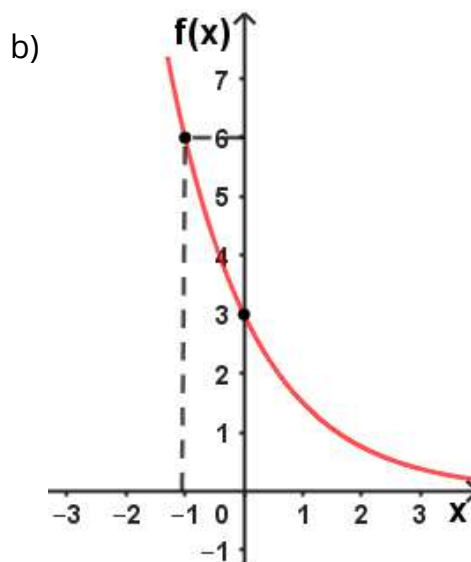
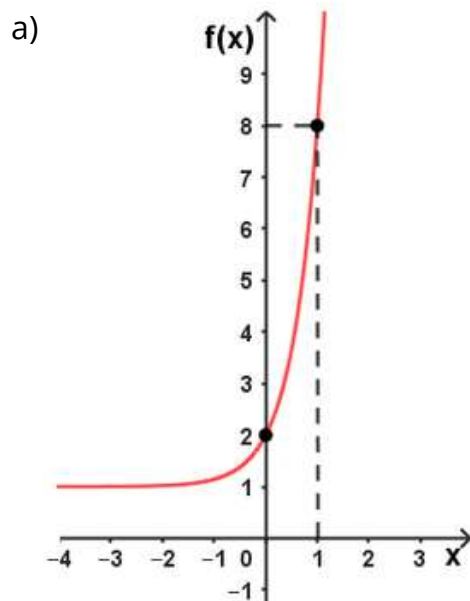
c) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 1$

d) $f(x) = 6^x$

e) $f(x) = 6^{x+1}$

ATIVIDADE 10

Em cada um dos casos a seguir, o gráfico exibe uma curva exponencial. Determine a lei de formação de cada uma destas funções.



Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio**. 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

_____. **Matemática completa 1º Ano. 4.** ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

_____. **Matemática: contexto & aplicações. 3.** ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

_____. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos**. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica**. Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões**. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências**. Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Funções e suas aplicações**. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões com a matemática. Ensino Médio**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

SAEPE - CAEd, UFJF. **Coleção 2016. Revista do Professor: Matemática**. Disponível em: <<https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/biblioteca>>. Acessado em: 01/12/2024.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva** - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.



GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO EXPONENCIAL: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRIPTOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	• Relacionar situações de financiamentos a juros compostos à expressão de uma função exponencial • Resolver problemas envolvendo funções exponenciais em diferentes contextos, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, juros compostos etc.	D088M - Utilizar função exponencial na resolução de problemas.

Contextualização

A matemática é uma ferramenta incrível que nos ajuda a entender o mundo ao nosso redor, e as **funções exponenciais** ocupam um lugar especial por sua capacidade de modelar fenômenos de crescimento e decaimento. Elas aparecem em diversas áreas, como planejamento financeiro, ciências naturais e até em estudos populacionais.

Um dos exemplos mais conhecidos é o dos **juros compostos**, que mostram como um montante de dinheiro cresce ao longo do tempo quando investido. Compreender esse conceito ajuda a planejar investimentos, calcular financiamentos e tomar decisões financeiras mais seguras. Já o **tempo de meia-vida** é outro exemplo fascinante: ele descreve como substâncias se degradam ao longo do tempo e tem aplicações na física, na química e na medicina, como no decaimento radioativo e na metabolização de medicamentos pelo organismo.

Pense, por exemplo, em calcular quanto de um remédio ainda está no corpo após algumas horas ou em entender como populações animais podem crescer exponencialmente em ambientes favoráveis. Esses são problemas reais que podem ser resolvidos com o uso das funções exponenciais, conectando a Matemática ao cotidiano de forma prática e significativa.

Neste material, você encontrará alguns exemplos reais que demonstram a importância e a beleza das funções exponenciais. A cada problema resolvido, você verá como a Matemática pode ser uma aliada poderosa para explorar e compreender fenômenos do mundo real.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

JUROS COMPOSTOS

Introdução

Os **juros compostos** são calculados sobre o capital inicial e sobre os juros acumulados ao longo dos períodos. Diferentemente dos juros simples, onde os juros são constantes, nos juros compostos os valores crescem de forma **exponencial**.

Uma das maneiras de calcular juros compostos é utilizando a seguinte fórmula:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

Onde:

- $M(t)$: montante acumulado (capital inicial mais os juros) após t períodos;
- C : capital inicial (ou principal);
- i : taxa de juros por período (em decimal); e
- t : número de períodos.

Exemplo 1: retorno de investimento

Você investiu R\$ 1 000,00 em uma aplicação com taxa de juros de 5% ao mês por 3 meses. Qual será o montante acumulado?

Para facilitar a compreensão desse processo algébrico, sugerimos a adoção de algumas etapas que auxiliem na resolução do problema.

1. Identifique os valores;
2. Substitua na fórmula de aplicação financeira a juros compostos;
3. Desenvolva o cálculo e determine o montante.

Etapas 1

$$C = 1\,000$$

$$i = 5\% = 0,05$$

$$t = 3$$

Etapas 2 e 3

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M(3) = 1\,000 \cdot (1 + 0,05)^3$$

$$M(3) = 1\,000 \cdot (1,05)^3$$

$$M(3) = 1\,000 \cdot 1,157625$$

$$M(3) = 1\,157,63$$

Após 3 meses, o montante será de aproximadamente R\$ 1 157,63.

Juros compostos e funções do tipo exponencial

A expressão $M(t) = P \cdot (1 + i)^t$ é uma função do tipo exponencial, pois:

- O valor inicial P é uma constante que controla o alongamento ou a compressão vertical;
- A soma $(1 + i)$ é a base da função;
- O expoente t é a variável independente que representa o tempo;
- Comportamento:
 - Quando $i > 0$, a função representa crescimento exponencial (exemplo: aplicações financeiras);
 - Quando $-1 < i < 0$, a função representa decaimento exponencial (exemplo: depreciação de bens).

Podemos, portanto, avaliar um investimento financeiro a juros compostos através de uma análise gráfica de sua função exponencial correspondente. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2: comparação de cenários

Avalie as duas aplicações financeiras abaixo e discorra sobre qual delas é mais rentável no período de 12 meses

Aplicação A: Capital inicial de R\$ 600,00 com taxa de 6% ao mês por 12 meses.

$$M_A(t) = 600 \cdot (1,06)^{12}$$

Aplicação B: Capital inicial de R\$ 700,00 com taxa de 4% ao mês por 12 meses.

$$M_B(t) = 700 \cdot (1,04)^{12}$$



Na figura 1, é possível observar o comportamento exponencial das aplicações financeiras A e B. Essa representação gráfica nos permite comparar os desempenhos e decidir qual delas oferece maior rentabilidade no período analisado.

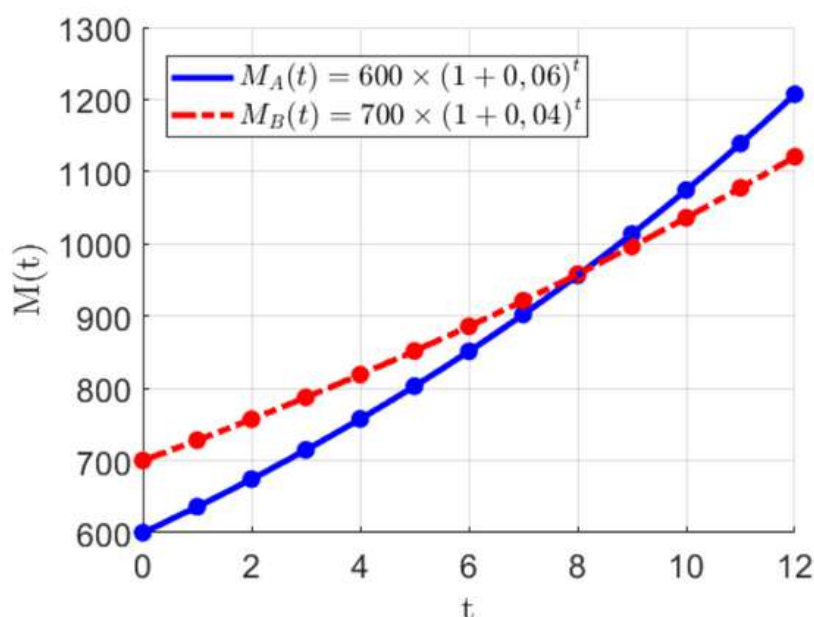


Figura 1: Comparação entre as aplicações financeiras A e B.

Ao analisar os resultados, conclui-se que, embora a aplicação B tenha um capital inicial maior, o crescimento exponencial da aplicação A faz com que ela ultrapasse a B em termos de montante acumulado antes do término de um ano.

OUTRAS APLICAÇÕES PRÁTICAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Crescimento populacional

Um dos exemplos mais comuns de função exponencial é o crescimento populacional.

Fórmula Geral:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

- $P(t)$: população no tempo t .
- P_0 : população inicial.
- r : taxa de crescimento (decimal).
- t : tempo.



Exemplo 3: crescimento populacional de javaporcos

Uma população inicial de 50 javaporcos está crescendo a uma taxa de 15% ao ano devido à ausência de predadores naturais. Qual será a população após 8 anos?

1. Identifique os valores:

$$P = 50$$

$$i = 15\% = 0,15$$

$$t = 8$$



2. Substitua na fórmula:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t \quad \longrightarrow \quad P(8) = 50 \cdot (1 + 0,15)^8$$

3. Calcule:

$$P(t) = 50 \cdot (1,15)^8$$

$$P(t) = 50 \cdot 3,059022$$

$$P(t) = 152,95$$

Resposta: Após 8 anos, a população será de aproximadamente 153 javaporcos.

Modelo de decaimento exponencial com meia-vida

O **tempo de meia-vida**, denotado por $T_{1/2}$, é definido como o intervalo de tempo necessário para que a quantidade de uma substância decaia para metade de seu valor inicial. Em sistemas regidos por funções exponenciais, esse decaimento é descrito por:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}},$$

onde:

- $Q(t)$: quantidade restante da substância no tempo t ;
- Q_0 : quantidade inicial da substância;
- t : tempo transcorrido;
- $T_{1/2}$: tempo de meia-vida da substância.



Alguns exemplos de fenômenos que modelamos através desse tipo de função:

- **Dcaimento radioativo:** Na Física, o tempo de meia-vida é fundamental para descrever o decaimento de elementos radioativos. Por exemplo: o carbono-14, usado na datação de fósseis, possui um tempo de meia-vida de aproximadamente 5 730 anos. Isso significa que após 5 730 anos, metade do carbono-14 inicial em um fóssil terá decaído.
- **Metabolização de medicamentos:** Na medicina, o tempo de meia-vida é usado para determinar a frequência com que os medicamentos devem ser administrados. Por exemplo: o paracetamol tem um tempo de meia-vida de cerca de 2 a 3 horas no corpo humano. Isso implica que a cada 2 a 3 horas, a quantidade de medicamento no organismo reduz pela metade.

Exemplo 4: ingestão de medicamento

Uma pessoa toma uma dose de 500 mg de um medicamento cujo tempo de meia-vida no corpo humano é de 4 horas. Qual será a quantidade de medicamento no organismo após 12 horas?

1. Identifique os valores:

$$\begin{aligned}Q_0 &= 500 \text{ mg}, \\T_{1/2} &= 4 \text{ horas}, \\t &= 12 \text{ horas}.\end{aligned}$$

2. Substitua na fórmula:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \longrightarrow Q(12) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}}$$

3. Simplifique o expoente:

$$Q(12) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

4. Calcule:

$$Q(12) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 500 \cdot \frac{1}{8} = \frac{500}{8} = 62,5$$

Resposta: Após 12 horas, restarão 62,5 mg do medicamento no organismo.



Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Calcule o montante mensal dos 6 primeiros meses de uma aplicação de R\$ 1 000,00 a uma taxa de 2% ao mês. Apresente os dados obtidos em uma tabela.

Resolução

Inicialmente, ajustar a fórmula de aplicação financeira a juros compostos para o contexto, ou seja

$$M(t) = P \cdot (1 + i)^t \quad \longrightarrow \quad M(t) = 1000 \cdot (1 + 0,02)^t = 1000 \cdot (1,02)^t$$

Agora vamos calcular o montante para cada mês:

$$M(0) = 1000 \cdot (1,02)^0 = 1000 \cdot 1 = 1000$$

$$M(1) = 1000 \cdot (1,02)^1 = 1000 \cdot 1,02 = 1020,00$$

$$M(2) = 1000 \cdot (1,02)^2 = 1000 \cdot 1,0404 = 1040,40$$

$$M(3) = 1000 \cdot (1,02)^3 \approx 1000 \cdot 1,06121 = 1061,21$$

$$M(4) = 1000 \cdot (1,02)^4 \approx 1000 \cdot 1,08243 = 1082,43$$

$$M(5) = 1000 \cdot (1,02)^5 \approx 1000 \cdot 1,10408 = 1104,08$$

$$M(6) = 1000 \cdot (1,02)^6 \approx 1000 \cdot 1,12616 = 1126,16$$

Podemos ver na tabela 1 os dados obtidos.

Tempo (meses)	Montante (R\$)
0	1 000,00
1	1 020,00
2	1 040,40
3	1 061,21
4	1 082,43
5	1 104,08
6	1 126,16

Tabela 1: Crescimento do montante ao longo dos meses.

EXERCÍCIO 2

Um carro comprado por R\$ 80 000,00 deprecia 15% ao ano. Qual será o valor do carro após 4 anos?

Resolução

Neste caso, a taxa de juros é negativa, indicando que o capital inicial sofre depreciação ao longo do tempo, em vez de se valorizar. Identificamos os valores da equação como:

$$P = 80000$$

$$i = -15\% = -0,15$$

$$t = 4$$

Substituímos esses valores na fórmula dos juros compostos:

$$M(t) = P \cdot (1 + i)^t \rightarrow M(4) = 80000 \cdot (1 - 0,15)^4 = 80000 \cdot (0,85)^4$$

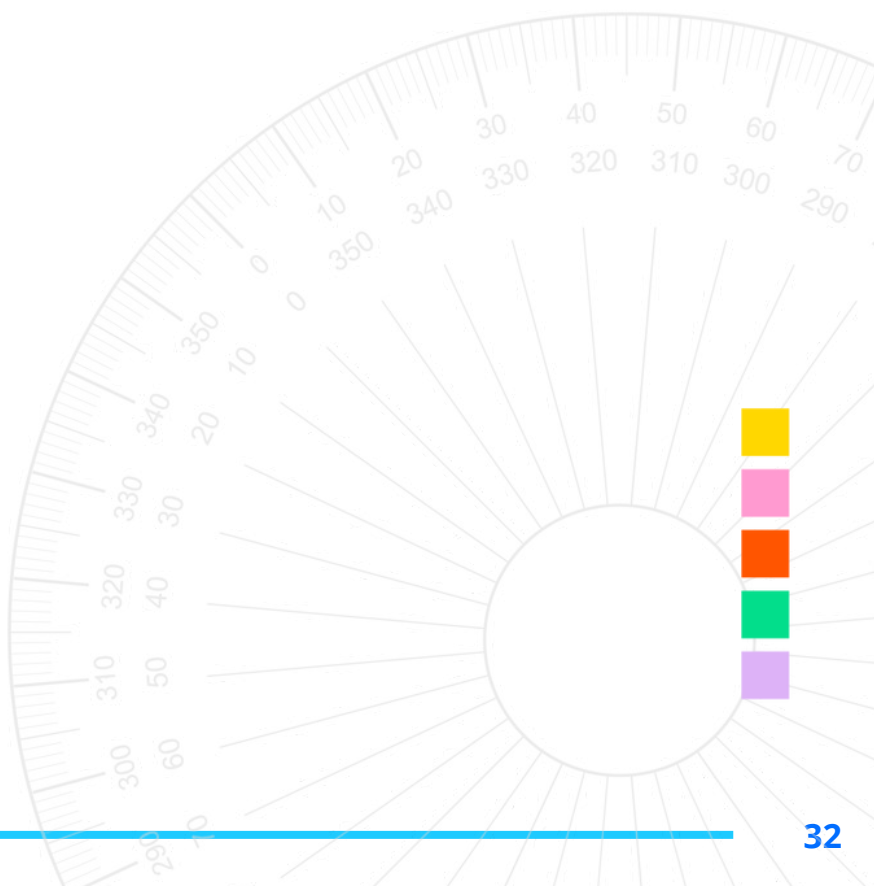
Agora, desenvolvemos os cálculos passo a passo:

$$M(4) = 80000 \cdot (0,85)^4$$

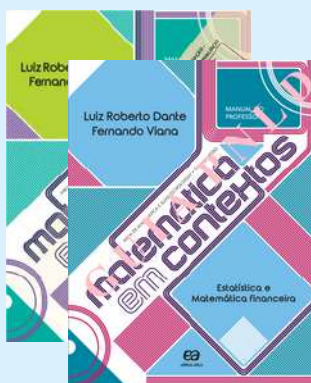
$$M(4) = 80000 \cdot 0,52200625$$

$$M(4) = 41760,50$$

Portanto, o valor do capital após 4 anos será de R\$ 41 760,50.



LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 1: Função exponencial.

- Ampliando a ideia de função exponencial. (p. 48 - 52)

Matemática em Contexto: estatística e matemática financeira. (DANTE).

Capítulo 2: Matemática financeira.

- Juros compostos. (p. 109 - 115);
- Conexão entre juros e funções (p. 123 - 125).



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.

- Equações exponenciais. (p. 64 - 65);
- Conexões - Radioatividade (p. 74).

Prisma Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas. (BONJORNO)

Capítulo 2: porcentagem e juros.

- Juros. (p. 73 - 77);
- Juros e funções (p. 78 - 81).

PDF AUXILIAR



Equações Exponenciais



Prezado professor, prezada professora:

Não é objetivo desta rotina pedagógica discutir sobre equações exponenciais. Contudo, entendemos que para resolver problemas utilizando funções exponenciais, eventualmente, precisamos recorrer a equações desse tipo. Assim, sugerimos, como algo opcional, este material auxiliar. Além dele, na página 37, há uma tarefa complementar, também opcional.



Atividades

ATIVIDADE 1

Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x) = 4^{x+1}$. Determine:

- a) $f(1) =$
- b) $f(-4) =$
- c) x quando $f(x) = 256$

ATIVIDADE 2

Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x) = 5^x - 2$. Determine:

- a) $f(3) =$
- b) $f(-1) =$
- c) x quando $f(x) = 23$

ATIVIDADE 3

O ibuprofeno é um medicamento frequentemente prescrito para aliviar dor e febre, com uma meia-vida de aproximadamente 2 horas. Isso significa que, após a ingestão de uma dose inicial N_0 de ibuprofeno, apenas 50% da medicação permanecerá na corrente sanguínea do paciente após um período de 2 horas.

A expressão matemática $Q(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$, descreve corretamente o decaimento exponencial da quantidade $Q(t)$ de medicamento na corrente sanguínea do paciente, em função do tempo t em horas, após a ingestão de um comprimido de ibuprofeno.

Carlos tomou um comprimido de ibuprofeno de 800 mg às 15 horas. Qual será a quantidade $Q(t)$ em mg, do medicamento ibuprofeno na corrente sanguínea de Carlos às 21 horas?

- a) 0,6 mg
 - b) 12,5 mg
 - c) 64 mg
 - d) 50 mg
 - e) 100 mg
- 

ATIVIDADE 4

As aplicações financeiras realizadas em instituições bancárias podem gerar rendimentos diários, mensais ou anuais, geralmente utilizando o sistema de juros compostos. Nesse sistema, os juros são somados ao saldo acumulado ao final de cada período, fazendo com que o valor investido cresça de forma exponencial ao longo do tempo. Por exemplo, ao investir R\$ 1.000,00 em uma aplicação com uma taxa de juros de 2% ao mês, o montante $M(t)$ acumulado após t meses pode ser descrito por uma função exponencial, seguindo as regras da capitalização composta. Assim, a função que relaciona o Montante $M(t)$ com o número de meses t após o início da aplicação é dada por:

a) $M(t) = 1\,000 + (1,02) \cdot t$

b) $M(t) = 1\,000 + (1,02)^t$

c) $M(t) = 1\,000 \cdot (1,02)^t$

d) $M(t) = 1\,000 \cdot (2)^t$

e) $M(t) = 1\,000^{2t}$

ATIVIDADE 5

A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação de água por resíduos industriais. A lei $N(t) = 300 - 10 \cdot 2^{t-1}$ fornece uma estimativa do número de espécies vivas $N(t)$ em função do número de anos (t) transcorridos após a instalação do parque industrial na região. Estime a quantidade de peixes que viviam no lago 5 anos após o ano da instalação do parque industrial.

ATIVIDADE 6

A LCI (Letra de Crédito Imobiliário) é uma modalidade de investimento em renda fixa, isenta de Imposto de Renda, que, em geral, oferece retornos superiores aos da caderneta de poupança, pois seu rendimento está atrelado à taxa do CDI.

Considerando uma aplicação inicial de R\$ 400,00 em um investimento que rende 100% do CDI, o que corresponde atualmente a uma taxa de 11% ao ano, podemos calcular a rentabilidade do investimento por meio da expressão exponencial $M(t) = 400 \cdot (1,11)^t$, onde t representa o número de anos de aplicação e $M(t)$ é o montante acumulado ao final do período.

Considerando as regras de capitalização e a expressão fornecida, qual é o montante gerado na aplicação de R\$ 400,00 após 3 anos?

a) R\$ 444,00

b) R\$ 544,00

c) R\$ 547,05

d) R\$ 560,00

e) R\$ 1 332,00

ATIVIDADE 7

As redes sociais possuem um grande poder de disseminação de informações. No entanto, as *fake news* (notícias falsas) têm se destacado recentemente, pois, ao serem publicadas em aplicativos de redes sociais, podem ser rapidamente compartilhadas e, ao se tornarem virais, alcançar um número expressivo de pessoas. Supondo que o alcance de uma notícia falsa seja modelado pela função $N(t) = 20 \cdot 3^{t-1}$, onde $N(t)$ representa o número de pessoas alcançadas após t minutos desde a divulgação da notícia. Calcule quantos minutos seriam necessários para que a notícia atingisse 1 620 pessoas.

ATIVIDADE 8

Um exemplo de população que cresce exponencialmente é a população humana. O crescimento exponencial começa de maneira lenta, mas acelera rapidamente à medida que o tamanho da população aumenta, uma vez que a base populacional também cresce ao longo do tempo.

Considerando uma cidade com uma população inicial de 30 000 habitantes e uma taxa de crescimento de 5% ao ano, calcule o número de habitantes nessa cidade após 2 anos a partir do início da observação.

ATIVIDADE 9

Considere uma cultura bacteriana que, em experimentos laboratoriais, apresentou crescimento exponencial, modelado pela equação $Q(t) = 3000 \cdot 2^t$, em que $Q(t)$ representa a quantidade de bactérias na cultura em função do intervalo de tempo t , expresso em horas. Em quantas horas após o início das observações a cultura atingiu 192 000 bactérias?

- a) 5 horas
- b) 6 horas
- c) 7 horas
- d) 10 horas
- e) 32 horas

ATIVIDADE 10

A depreciação de veículos é uma das principais preocupações de quem investe na compra de um carro, e isso não é por acaso! Assim que um veículo zero quilômetro é adquirido, seu valor começa a cair devido ao uso e ao desgaste ao longo do tempo. Suponha que um veículo, comprado por R\$ 120.000,00, sofra uma depreciação anual de 10%, o que faz seu valor seguir a expressão exponencial $V(t) = 120\,000 \cdot (0,9)^t$, onde $V(t)$ representa o valor de venda do veículo após t anos de uso. Considerando essa equação, em quanto tempo o carro poderá ser vendido por R\$ 87.480,00?





TAREFA COMPLEMENTAR

Que tal explorar um pouco mais sobre equações exponenciais?

Trouxemos esta tarefa complementar para que você possa aprender um pouco mais sobre essas equações que, algumas vezes, são úteis para resolver problemas abordando funções exponenciais.

Determine o valor de x em cada uma das equações exponenciais a seguir:

$$a) 2^x = 32$$

$$f) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$$

$$b) 10^x = 1000$$

$$g) 2^{3x} = 64$$

$$c) 9^x = 243$$

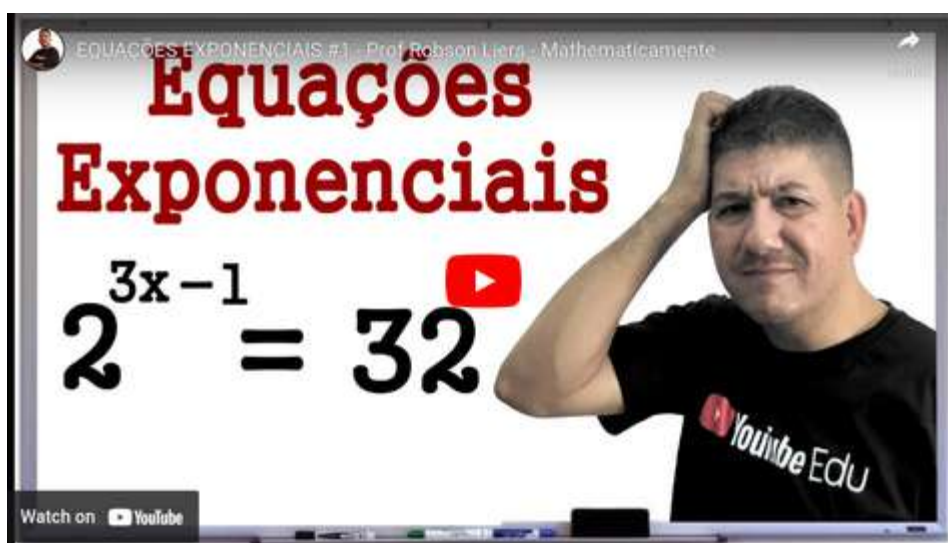
$$h) 3^x = \sqrt{3}$$

$$e) 5^x = \frac{1}{125}$$

$$i) 10^x = 0,01$$

Vídeo Aula: EQUAÇÕES EXPONENCIAIS #1 - Prof Robson Liers - Matematicamente

<https://www.youtube.com/watch?v=y5Yk1QuiWdI>



Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

_____. **Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio**. 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

_____. **Matemática completa 1º Ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

_____. **Matemática: contexto & aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

_____. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos**. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica**. Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões**. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências**. Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões com a matemática. Ensino Médio**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIERS, Robson Liers. **Matematicamente**. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS #1. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=y5Yk1QuiWdI>>. Acessado em: 07/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Funções e suas aplicações**. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática**. Ensino Médio. 1ª ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.