GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO LOGARÍTMICA: FUNÇÃO INVERSA E A RELAÇÃO ENTRE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT403 Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	• Construir tabelas de valores para funções exponenciais e logarítmicas, explorando o comportamento numérico de cada uma. • Comparar, com ou sem auxílio de software, gráficos de uma função exponencial e sua respectiva inversa (função logarítmica), expressando a relação entre potenciação e logaritmo de números reais de mesma base. • Identificar e descrever os conceitos de domínio, imagem e crescimento em funções exponenciais e logarítmicas.	**D088_M** Utilizar função exponencial na resolução de problemas.

Contextualização

As funções logarítmicas são fascinantes por sua capacidade de representar padrões de crescimento e decaimento em diversos contextos. Mas e se olharmos para um conceito ainda mais amplo? Existe uma relação fundamental entre as funções logarítmicas e exponenciais: elas são funções inversas. Isso significa que uma desfaz a operação da outra, e juntas, formam um par essencial na matemática.

Pense no crescimento de uma população de bactérias em um ambiente favorável. Inicialmente, elas se multiplicam rapidamente, dobrando de quantidade em curtos intervalos de tempo. Esse crescimento pode ser modelado por uma função exponencial. Agora imagine que queremos descobrir há quanto tempo essa população começou a crescer, dado um número atual de bactérias. Para isso, utilizamos a função logarítmica, que nos permite voltar no tempo e determinar a origem desse crescimento.

Essa relação de inversão se reflete nos gráficos: enquanto a função exponencial cresce rapidamente para valores positivos de x, sua inversa, a função logarítmica, cresce de maneira mais lenta, estendendo-se indefinidamente à direita. Essa simetria nos ajuda a compreender como certos fenômenos podem ser analisados sob diferentes perspectivas – seja no crescimento acelerado de uma tendência ou na busca pelas condições iniciais que levaram a esse crescimento.

Explorar essa conexão entre exponenciais e logaritmos é essencial para entender desde o comportamento de circuitos elétricos até algoritmos computacionais de compressão de dados. Aprofundar-se nessa conexão permite uma visão mais ampla sobre como esses modelos matemáticos se complementam na descrição de processos naturais e tecnológicos. Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

O CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA

Antes de explorarmos as relações entre funções exponenciais e logarítmicas, é fundamental compreender o que significa dizer que uma função é a inversa de outra.

Definição formal de função inversa

Uma função $f : A \longrightarrow B$ tem uma função inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ se, e somente se, f for **bijetora**, ou seja, **injetora** (valores distintos de x geram valores distintos de y) e **sobrejetora** (todo elemento do conjunto de chegada B tem pelo menos um correspondente em A), tal que:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \in A.$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \qquad \text{para todo } y \in B.$$

Ou seja, dada uma função bijetora f, sua função inversa, denotada por f^{-1}, é aquela que reverte a operação realizada por f, e vice-versa. Em outras palavras, se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

VOCÊ SABIA?

O crescimento de cristais pode ser modelado por uma função logarítmica, onde a velocidade de crescimento diminui com o tempo. A inversa dessa função pode ser usada para determinar o tempo necessário para que um cristal atinja determinado tamanho, o que é importante em processos industriais de fabricação de cristais e semicondutores, que podem atuar tanto como condutores quanto como isolantes, o que os torna essenciais para a eletrônica moderna.

Exemplo

Considere a função bijetora $f(x) = 2x + 3$. Para encontrarmos a sua inversa, podemos fazer os seguintes procedimentos:

1. Troque $f(x)$ por y.

$$y = 2x + 3$$

2. Isole a variável x para fazer a sua equação em termos de y.

$$y = 2x + 3 \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

3. Substitua x por $f^{-1}(y)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{y-3}{2}$$

Por fim, para consolidar o conceito de função inversa, vamos aplicar alguns valores arbitrários de x na função do exemplo dado. Em seguida, utilizamos os valores obtidos para verificar se a função inversa realmente desfaz a operação, retornando ao valor original de x. A tabela a seguir mostra esse processo:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$	$\boldsymbol{y}$ **obtido**	$\boldsymbol{f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}}$	$\boldsymbol{x}$ **obtido**
-3	$2 \cdot (-3) + 3$ $= -6 + 3 = -3$	-3	$\frac{-3-3}{2} = \frac{-6}{2} = -3$	-3
$-1,5$	$2 \cdot (-1.5) + 3$ $= -3 + 3 = 0$	0	$\frac{0-3}{2} = \frac{-3}{2} = -1,5$	$-1,5$
0	$2 \cdot (0) + 3$ $= 0 + 3 = 3$	3	$\frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$	0
5	$2 \cdot (5) + 3$ $= 10 + 3 = 13$	13	$\frac{13-3}{2} = \frac{10}{2} = 5$	5

Tabela 1: Verificação da inversibilidade da função do exemplo dado.

Como podemos ver nesses exemplos da tabela 1, ao aplicar um determinado valor de x a $f(x)$, obtemos um valor y. Quando aplicamos esse y em $f^{-1}(y)$, recuperamos o valor original de x, confirmando que f^{-1} realmente desfaz a operação de f.

Visualizando o gráfico da função e da sua inversa

Para compreender melhor a relação entre uma função e sua inversa, representamos graficamente, na figura 1, a função dada no exemplo, $f(x) = 2x + 3$, juntamente com sua inversa, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$. Nesse contexto, utilizamos x como variável de entrada de ambas para comparar diretamente o comportamento das duas funções para os mesmos valores. Além disso, incluímos a reta identidade $y = x$, que desempenha um papel fundamental na interpretação geométrica das funções inversas.

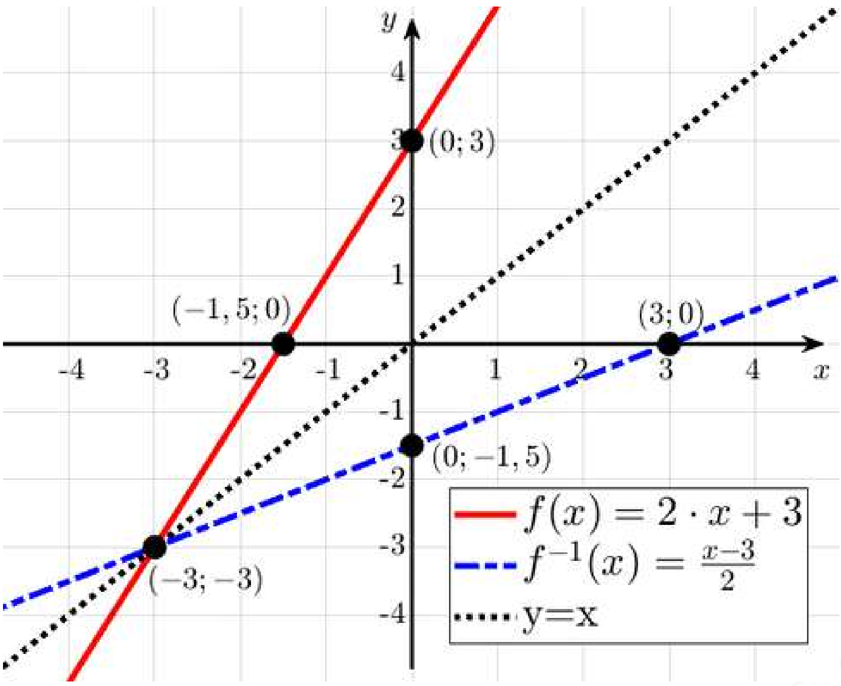


Figura 1: Comparação do gráfico de uma função e sua inversa.

Uma propriedade essencial das funções inversas é a **simetria de seus gráficos em relação à reta $y = x$**. Isso significa que, se um ponto $(a; b)$ pertence ao gráfico da função f, então o ponto $(b; a)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Para ilustrar essa simetria, destacamos no gráfico os seguintes pares de pontos, que também podem ser confirmados pelos valores apresentados na tabela 1:

- $(-3; -3)$, que é um ponto presente em ambas as funções;
- $(-1,5;\ 0)$ em f, e seu correspondente $(0;\ -1,5)$ em f^{-1}; e
- $(0; 3)$ em f, e seu correspondente $(3; 0)$ em f^{-1}.

Essa reflexão dos pontos em relação à reta $y = x$ é uma característica marcante das funções inversas. Geometricamente, essa propriedade reforça a ideia de que a inversa de uma função "desfaz" sua operação original, trocando as posições de entrada e saída.

VOCÊ SABIA?

A percepção de brilho e intensidade luminosa no olho humano segue uma função logarítmica. Isso significa que a nossa capacidade de perceber diferenças de brilho é uma função inversa de uma função exponencial que descreve a quantidade de luz que incide sobre a retina. A inversa dessa relação ajuda a explicar como ajustamos nossa percepção ao lidar com mudanças em intensidade luminosa em ambientes com diferentes níveis de iluminação.

A FUNÇÃO LOGARÍTMICA COMO INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Agora que compreendemos o conceito de função inversa, vamos demonstrar que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Para isso, podemos partir da definição de uma das funções (lembrando que ambas são bijetoras) e isolar a variável x, como foi feito no exemplo do tópico anterior.

Assim, consideremos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por:

$$f(x) = a^x, \qquad \text{em que } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Trocando $f(x)$ por y, temos:

$$y = a^x$$

Agora, aplicamos a definição de logaritmo para isolar x:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Por fim, substituindo x por $f^{-1}(y)$, obtemos a função inversa:

$$f^{-1}(y) = \log_a y$$

Portanto, a função logarítmica é a inversa da função exponencial, ou seja, $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Isso significa que a função logarítmica "desfaz" a exponencial.

Verificação da relação de invertibilidade entre as funções

Agora, verificamos que ao aplicar uma função seguida de sua inversa, recuperamos o valor original:

1. Verificando $f^{-1}(f(x)) = x$:

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x$$

Pela propriedade de logaritmo de potenciação, temos

$$\log_a a^x = x \cdot \cancelto{1}{\log_a a} = x \cdot 1 = x$$

2. Verificando $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = a^{\log_a y}$$

Pela propriedade fundamental de logaritmo, temos que:

$$a^{\log_a y} = y$$

Dessa forma, comprovamos que a função exponencial e a função logarítmica são realmente inversas uma da outra.

Na figura 2, observamos o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$, juntamente com sua inversa, a função logarítmica de base 2, $f^{-1}(x) = \log_2 x$. A reta identidade $y = x$ destaca a **simetria entre os gráficos**, evidenciando que cada ponto da função exponencial tem um correspondente refletido na função logarítmica. Em particular, os pontos (1;0) e (0;1) ilustram essa reflexão, reforçando a relação entre as funções inversas.

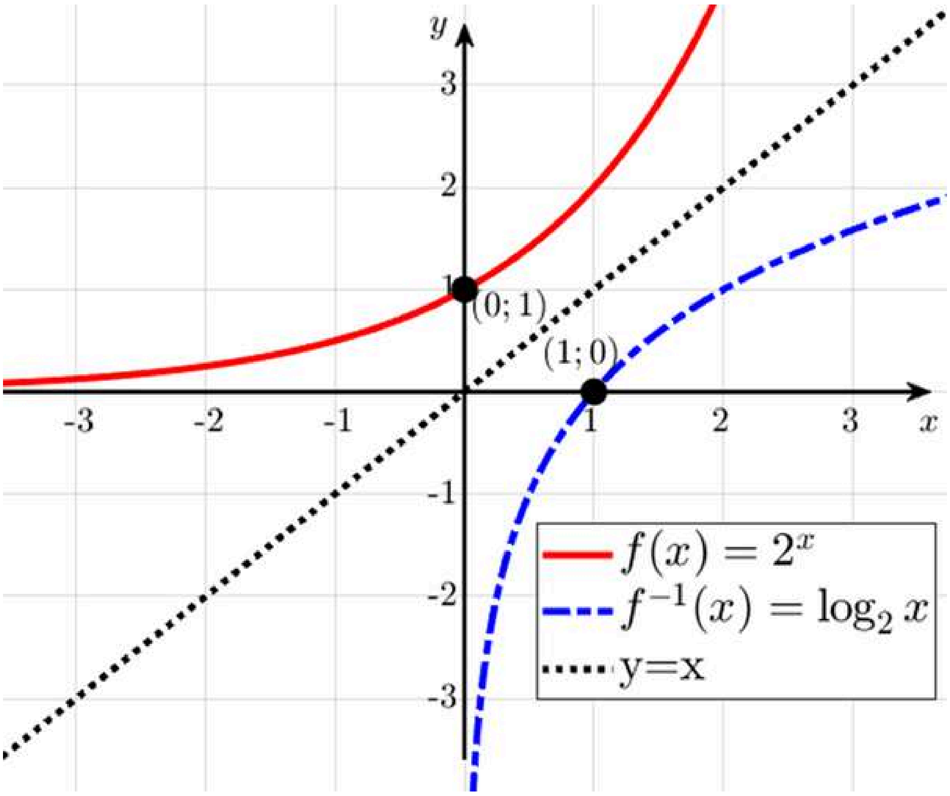


Figura 2: Simetria entre as funções exponencial e logarítmica de base 2.

Exercícios Resolvidos

Exercício 1

Sabendo que $f(x) = 3^x$ encontre $f^{-1}(27)$.

Resolução

A função inversa de $f(x) = 3^x$ é $f^{-1}(x) = \log_3 x$. Assim,

$$f^{-1}(27) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \cdot \cancelto{1}{\log_3 3} = 3 \cdot 1 = 3$$

Portanto, $f^{-1}(27) = 3$.

Rascunho

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 27 = 3^3$$

Exercício 2

A função exponencial $f(x) = 5^x$ passa pelos pontos $A(2\,;\,25)$ e $B(-1\,;\,0,2)$.

a) Determine os pontos correspondentes a A e B no gráfico de sua inversa.
b) Escreva a expressão $f^{-1}(x)$ e verifique se os pontos obtidos pertencem ao seu gráfico.

Resolução

a) Sabemos que a inversão de uma função troca os papéis de x e y. Assim, os pontos do gráfico da inversa serão:

- Se $(2\,;\,25)$ pertence a f, então $(25\,;\,2)$ pertence a f^{-1}.
- Se $(-1\,;\,0,2)$ pertence a f, então $(0,2\,;\,-1)$ pertence a f^{-1}.

b) A função $f(x) = 5^x$ tem como inversa a função logarítmica de mesma base:

$$f^{-1}(x) = \log_5 x$$

Agora, verificamos se os pontos $(25\,;\,2)$ e $(0,2\,;\,-1)$ pertencem ao gráfico de $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(25) = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \cdot \cancelto{1}{\log_5 5} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f^{-1}(25) = \log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1 \cdot \cancelto{1}{\log_5 5} = -1 \cdot 1 = -1$$

Os valores conferem, confirmando que os pontos encontrados realmente pertencem ao gráfico da inversa.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logarítmica.
- A função logarítmica. (p. 88 - 89).

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.
- Função logarítmica. (p. 101 - 102).

VIDEOAULAS

Portal da OBMEP
Função Logarítmica

Professor(a),
nesse link você encontra três vídeos sobre Logaritmo. Eles podem ser um suporte para o estudo do aluno, caso considere necessário.

Atividades

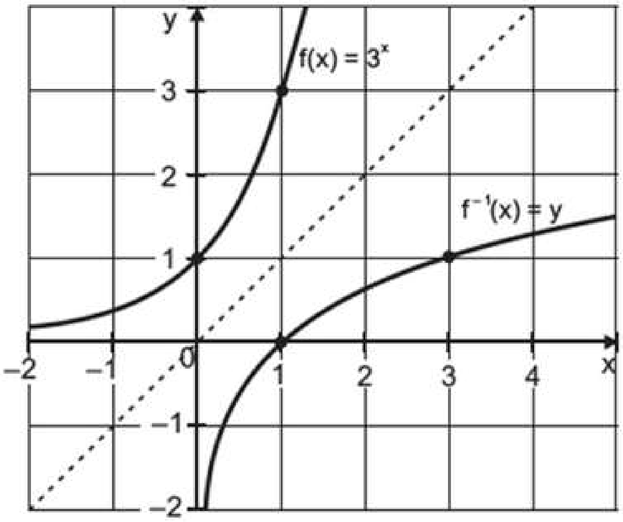
ATIVIDADE 1

As funções $f(x) = log_8\, x$ e $g(x) = 8^x$ são:

a) Opostas
b) ímpares
c) Inversas
d) Pares
e) Constantes

ATIVIDADE 2

(SAEPE) No gráfico abaixo, está representada a função definida por $f(x) = 3^x$ e sua inversa.



A função inversa de $f(x) = 3^x$ representada no gráfico por $f^{-1}(x) = y$ é:

$a)\, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$b)\, y = log_3\, x$

$c)\, x = log_y\, 3$

$d)\, y = -3^x$

$e)\, y = log_{\frac{1}{3}}\, y$

ATIVIDADE 3

Observe as representações gráficas 1 e 2 a seguir:

Gráfico 1

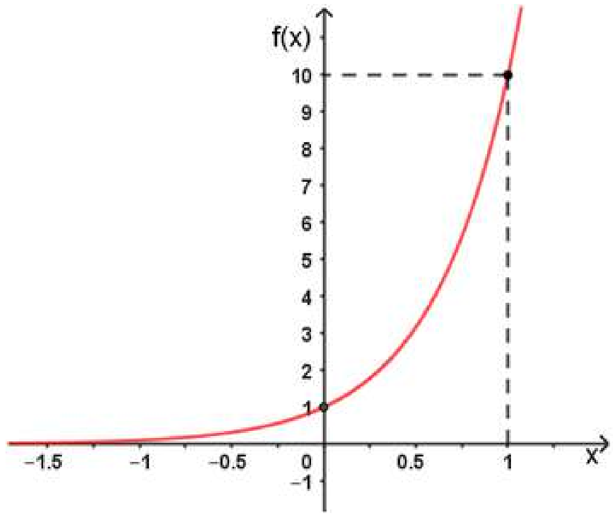
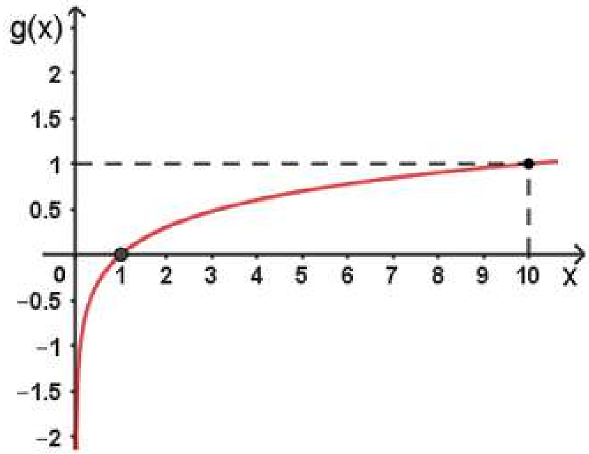


Gráfico 2



Com base nas representações gráficas acima, analise suas características e definições correspondentes e marque a alternativa **incorreta**:

a) Com base nas representações gráficas 1 e 2, podemos afirmar que o gráfico 1 representa à função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, enquanto o gráfico 2 representa a função logarítmica do tipo $g(x) = log_a\, x$. Ambas as funções são crescentes, pois a base *a* é maior que 1.

b) O domínio de uma função corresponde aos valores possíveis que podem ser atribuídos a *x* na função. Assim, no gráfico 1, o domínio abrange todos os valores reais de *x*, ou seja, x $\in \mathbb{R}$. No gráfico 2, o domínio é restrito aos valores reais positivos, ou seja, *x > 0*.

c) No gráfico 1, o conjunto imagem é representado por *y > 0*, ou seja, *y* assume apenas valores positivos. No gráfico 2, o conjunto imagem inclui todos os valores de *y*, sem restrições, podendo ser qualquer número real.

d) Se o gráfico de $f(x) = a^x$ for crescente, o gráfico de sua função inversa, $f^{-1}(x)$, também será crescente. No entanto, a inclinação de $f^{-1}(x)$ será mais suave, especialmente para valores grandes de *x*.

e) O gráfico 1 corresponde à função exponencial $f(x) = 10^x$. Portanto, sua função inversa, representada no gráfico 2, é dada por $g(x) = log_{\frac{1}{10}}\, x$.

ATIVIDADE 4

Lucas e João estavam estudando o comportamento de diferentes funções quando, em determinado momento, se depararam com um desafio. Utilizando a função $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, Lucas tinha como objetivo determinar o valor de *y* para cada valor de *x*, conforme mostrado na Tabela 1. Em seguida, ele pediu a João para representar, em uma nova tabela (Tabela 2), os valores de x e y da função inversa da função exponencial, ou seja, da função logarítmica, representada por $y = log_{\frac{1}{5}}\ x$.

a) Ajude Lucas a completar a Tabela 1 e João a realizar a tarefa, preenchendo a Tabela 2 com os valores correspondentes de *x* e *y*.

Tabela 1

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	***(x, y)***
-1	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5^1 = 5$	(-1, 5)
0	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 =$	
1		
2		

Tabela 2

x	$y = log_{\frac{1}{5}}\ x$

b) Após preencher as Tabelas 1 e 2, utilize seu caderno para representar as coordenadas (x, y) de ambas as tabelas em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, trace o gráfico da função *f(x)* e de sua inversa $f^{-1}(x)$.

c) Indique qual é o domínio e o conjunto imagem para as funções *f(x)* e $f^{-1}(x)$.

d) Observe os gráficos das funções *f(x)* e $f^{-1}(x)$, e indique se elas são crescentes ou decrescentes, justificando sua resposta com base no comportamento numérico das funções para os valores de *x* escolhidos.

ATIVIDADE 5

Considere a função logarítmica *f(x)* dada por $f(x) = log_6 x$. Determine o que se pede a seguir:

a) *f(216)* =

b) *D(f)* =

c) *Im(f)* =

d) *x* tal que *f(x)* = 2

e) $f^{-1}(x) =$

f) $f^{-1}(1) =$

ATIVIDADE 6

Uma startup de tecnologia está desenvolvendo um novo aplicativo de mensagens, e o número de usuários do aplicativo está crescendo de forma exponencial ao longo do tempo. A evolução desse número de usuários é modelada pela função exponencial:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0,15 \cdot t}$$

onde *N(t)* representa o número de usuários do aplicativo após *t* meses, N_0 é o número inicial de usuários (no momento do lançamento) e *t* é o tempo, em meses, desde o lançamento do aplicativo.

A equipe de marketing da startup deseja estimar o tempo necessário para que o número de usuários do aplicativo atinja um determinado valor *N(t)*. Para isso, eles usam a função logarítmica derivada da equação exponencial (função inversa da exponencial):

$$t = \frac{log_e\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{0,15}$$

A seguir, analise e responda às questões propostas:

a) Identifique o domínio e a imagem da função $N(t) = N_0 \cdot e^{0,15 \cdot t}$. Lembre que t representa o tempo e que N(t) representa o número de usuários.

b) Identifique o domínio e a imagem da função $t = \frac{log_e\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{0,15}$. Lembre que N(t) representa o número de usuários e t representa o tempo.

ATIVIDADE 7

O professor escreveu no quadro da sala de aula a seguinte equação exponencial:

$$10^x = 3$$

Em seguida, solicitou que um aluno apresentasse uma solução para o expoente *x*, sem utilizar uma calculadora. Assim, o aluno expressou a solução para *x* da seguinte forma:

$a)\ x = 0$

$b)\ x = 2$

$c)\ x = log_3 10$

$d)\ x = log\, 3$

$e)\ x = log\, 10$

ATIVIDADE 8

Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -log[H^+]$. Dessa maneira, podemos afirmar que se o pH de uma substância é 10, então a concentração de $[H^+]$ é:

$a)\ 10^{-10}$

$b)\ 10^{10}$

$c)\ -10^{10}$

$d)\ 1\,010$

$e)\ -1$

ATIVIDADE 9

A lei que mede o ruído é definida pela expressão $R = 120 + 10 \cdot log\, I$, em que *I* é a intensidade sonora, medida em watt por metro quadrado (W/m²) e *R* é a medida do ruído, em decibéis (dB). Nosso ouvido capta sons a partir de 0 dB, e uma conversa normal gira em torno de 60 dB. Já em níveis acima de 100 dB, apenas 3 minutos já são suficientes para danificar as células auditivas.

A intensidade sonora (*I*) para um som de 100 dB é igual a:

$a)\ 10^{-12}\ W/m^2$

$b)\ 10^{-2}\ W/m^2$

$c)\ 10\ W/m^2$

$d)\ 10^2\ W/m^2$

$e)\ 10^{12}\ W/m^2$

ATIVIDADE 10

Dentre os problemas decorrentes da automedicação, está a ingestão excessiva de medicamentos. Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional a quantidade ingerida e ao tempo decorrido.
Suponha que a quantidade de determinado medicamento no organismo possa ser modelada pela função $Q(t) = Q_0 \cdot (0,5)^t$, em que Q_0 é a quantidade ingerida (em mg) e *Q(t)* é a quantidade do medicamento no organismos (em mg) decorridas *t* horas da ingestão.
Se um paciente ingerir uma super dose de um medicamento cujo princípio ativo é de 500 mg, após quanto tempo no organismo a quantidade da droga será igual a 90 mg? (Considere: $log\,5 \approx 0,70 \;\; e \;\; log\,0,18 \approx -0,74$).

a) 0,41 horas
b) 1,06 horas
c) 2,47 horas
d) 3,6 horas
e) 5,6 horas

atenção

TAREFA COMPLEMENTAR

Que tal explorar um pouco mais sobre equações Logarítmicas?

Trouxemos esta tarefa complementar para que você possa aprender um pouco mais sobre essas equações que, algumas vezes, precisamos recorrer para resolver problemas abordando funções Logarítmicas.

Considerando as equações logarítmicas a seguir, determine o conjunto solução para cada uma delas.

$a)\; log_5\,(x+4) = log_5\,25$

$b)\; log_4\,(2 \cdot x) - 1 = 2$

$c)\; log_5\,125 = x - 4$

$d)\; \log\, x + \log\, 4 = log_3\,9$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

______. **Matemática Completa 1º ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio.** 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

______. **Matemática: contexto & aplicações. 3**. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.** 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica**. Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

SAEPE - CAEd, UFJF. **Coleção 2016. Revista do Professor: Matemática.** Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/biblioteca>. Acessado em: 29/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Funções e suas aplicaçõe**s. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.